SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jasmina Marinković

DVOSTRUKI REDOVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Rajna Rajić

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Niz je jedan od temeljnih matematičkih pojmova. Pod nizom realnih brojeva podrazumijevamo funkciju koja svakom prirodnom broju n pridružuje realni broj a_n. Jedno od pitanja koje postavljamo pri promatranju niza (a_n) je što se događa s njegovim članovima a_n za velike vrijednosti broja n. Tu dolazimo do važnih pojmova u matematičkoj analizi, a to su konvergencija i limes niza. Iako su intuitivno jasni, za njihovo ispravno shvaćanje potrebna je precizna definicija. Nadalje, za razliku od konačnih nizova realnih brojeva, čije članove znamo zbrajati, zbrajanje svih članova nekog beskonačnog niza ne mora uvijek imati smisla. Proces traženja sume svih članova nekog beskonačnog niza (a_n) dovodi nas do pojma reda. Uz polazni se niz veže niz parcijalnih suma (s_n), čiji se n-ti član dobije zbrajanjem prvih n članova niza (a_n). U slučaju da niz (s_n) konvergira, njegov ćemo limes smatrati sumom reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Tema ovog rada su dvostruko indeksirani nizovi i dvostruki redovi. Dvostruko indeksirani niz realnih brojeva je funkcija koja svakom uređenom paru (m, n) prirodnih brojeva pridružuje realni broj $a_{m,n}$. Ove realne brojeve možemo zamišljati kao elemente beskonačne matrice, pri čemu je $a_{m,n}$ (m, n)-ti član te matrice. Slično kao i kod nizova realnih brojeva i ovdje se postavlja pitanje smisla zbrajanja beskonačno mnogo članova dvostruko indeksiranog niza realnih brojeva. U vezi s tim uvodi se pojam dvostrukog reda. Postoji više načina definiranja konvergencije dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, ovisno o tome koje se konačne sume članova $a_{k,l}$ razmatraju. Mi smo se odlučili za definiciju konvergencije dvostrukog reda u terminima konvergencije dvostruko indeksiranog niza $(A_{m,n})$, gdje je $A_{m,n}$ zbroj svih članova $a_{k,l}$ za $k = 1, \ldots, m$ i $l = 1, \ldots, n$. Ovu je definiciju konvergencije uveo Pringsheim 1897. godine u radu [6].

Rad je podijeljen na dva poglavlja. U prvom poglavlju se obrađuje teorija dvostruko indeksiranih nizova analogno načinu obrade nizova. Uvodi se pojam konvergencije dvostruko indeksiranog niza. U mnogim primjerima se limes dvostruko indeksiranog niza ne može jednostavno izračunati te nas samo zanima postoji li limes, a ne koliko limes iznosi. Stoga je važno opisati uvjete uz koje će dvostruko indeksirani niz konvergirati. U prvom se poglavlju također obrađuju (bi)monotoni dvostruko indeksirani nizovi. Daju se nužni i dovoljni uvjeti uz koje monotoni dvostruko indeksirani nizovi konvergiraju.

U drugom poglavlju se uvodi pojam dvostrukog reda. Daju se primjeri dvostrukih redova: geometrijski, eksponencijalni, harmonijski, alternirajući i teleskopski dvostruki red. Važan dio drugog poglavlja su kriteriji kojima se može ustanoviti konvergencija ili divergencija dvostrukog reda. Također se proučavaju dvostruki redovi potencija. Zanimljivo je da dvostruki red potencija može imati više biradijusa konvergencije za razliku od jedinstvenosti radijusa konvergencije reda potencija. Rad završava proučavanjem Taylorovih dvostrukih redova, koji čine bitnu klasu unutar dvostrukih redova potencija.

Poglavlje 1

Dvostruko indeksirani nizovi

U ovom poglavlju cilj je razraditi teoriju dvostruko indeksiranih nizova i njihove konvergencije. Način na koji se to obrađuje analogan je načinu obrade nizova.

1.1 Konvergencija dvostruko indeksiranog niza

Definicija 1.1. *Dvostruko indeksirani niz u $\mathbb{R}$ je realna funkcija čija je domena skup $\mathbb{N}^2 = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{N}\}$ svih parova prirodnih brojeva.*

Oznake za dvostruko indeksirane nizove su $(a_{m,n})$, $(b_{m,n})$, itd. ili $(A_{m,n})$, $(B_{m,n})$, itd. Vrijednost dvostruko indeksiranog niza $(a_{m,n})$ na $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ je $a_{m,n}$ i zove se (m,n)-ti član dvostruko indeksiranog niza.

Za dvostruko indeksirane nizove koristit ćemo termine "ograničen odozgo", "ograničen odozdo" i "ograničen" kao što se koriste i za funkcije dviju varijabli.

Na $\mathbb{N}^2$ uvodimo relaciju parcijalnog uređaja:

$$(m_1,n_1) \leq (m_2,n_2) \Leftrightarrow (m_1 \leq m_2 \text{ i } n_1 \leq n_2)$$

za $(m_1,n_1),(m_2,n_2) \in \mathbb{N}^2$.

Definicija 1.2. *Kažemo da dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ konvergira ili teži k realnom broju $a \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $(m_0,n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da vrijedi $\left|a_{m,n} - a\right| < \varepsilon$ za sve $(m,n) \geq (m_0,n_0)$.*

Lako se vidi da je realan broj a jedinstven i zove se *granična vrijednost* (*limes*) dvostruko indeksiranog niza $(a_{m,n})$. Pišemo $a_{m,n} \longrightarrow a$ (kada $(m_0,n_0) \longrightarrow (\infty,\infty)$), odnosno

$$a = \lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n}.$$

Za dvostruko indeksirani niz koji ne konvergira kažemo da *divergira*. Posebno, ako za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $a_{m,n} > \alpha$ za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ onda kažemo da $(a_{m,n})$ *divergira* k ∞ i pišemo $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = \infty$ ili $a_{m,n} \longrightarrow \infty$. Slično, $(a_{m,n})$ *divergira* k $-\infty$ ako za svaki $\beta \in \mathbb{R}$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $a_{m,n} < \beta$ za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$. Tada pišemo $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = -\infty$ ili $a_{m,n} \longrightarrow -\infty$.

Primjer 1.1.1. Ako je $a_{m,n} := \frac{1}{m+n}$, $b_{m,n} := m + n$, $c_{m,n} := (-1)^{(m+n)}$ za $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, onda $a_{m,n} \longrightarrow 0$, $b_{m,n} \to \infty$, a dvostruko indeksirani niz $(c_{m,n})$ je ograničen, ali divergentan.

Znamo da je konvergentan niz ograničen. Međutim, konvergentan dvostruko indeksirani niz ne mora biti ograničen.

Primjer 1.1.2. Neka je $a_{m,n} := n$, ako je $m = 1$, $a_{m,n} := m$, ako je $n = 1$ i $a_{m,n} := 0$ ako je $m \neq 1$ i $n \neq 1$. Onda $a_{m,n} \longrightarrow 0$ budući da je $a_{m,n} = 0$ za sve $(m, n) \geq (2, 2)$, ali očito $(a_{m,n})$ nije ograničen.

Primijetimo da se konvergencija dvostruko indeksiranog niza $(a_{m,n})$ ne mijenja ako se promijene neki članovi niza, pod uvjetom da postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je ili $m \leq m_0$ ili $n \leq n_0$ kad god je (m, n)-ti član niza promijenjen. Dvostruko indeksirani niz može se shematski zapisati na sljedeći način:

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Tada neki ili svi $a_{m,n}$-ovi zapisani u konačnom broju redaka i/ili stupaca mogu biti promijenjeni bez utjecaja na konvergenciju dvostruko indeksiranog niza $(a_{m,n})$. (Uočimo da svaki redak i svaki stupac sadrži beskonačno mnogo $a_{m,n}$-ova.)

Teorem 1.3. (i) *Ako je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$ *i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} b_{m,n} = b$, *onda je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} (a_{m,n} + b_{m,n}) = a + b$.

(ii) *Ako je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$ *i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} b_{m,n} = b$, *onda je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n}b_{m,n} = ab$.

(iii) *Ako je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$ *i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} b_{m,n} = b$, *pri čemu je* $b_{m,n} \neq 0$ *za sve* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ *i* $b \neq 0$, *onda je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} \frac{a_{m,n}}{b_{m,n}} = \frac{a}{b}$.

Dokaz. (i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da $\left|a_{m,n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\left|b_{m,n} - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} \left|a_{m,n} + b_{m,n} - (a + b)\right| &= \left|a_{m,n} + b_{m,n} - a - b\right| \\ &\leq \left|a_{m,n} - a\right| + \left|b_{m,n} - b\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$. Time smo dokazali da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} (a_{m,n} + b_{m,n}) = a + b$.

(ii) Neka je zadano $\varepsilon > 0$. Neka je $M := \frac{-(|a|+|b|)+\sqrt{(|a|+|b|)^2+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$. Uočimo da je $\varepsilon M^2 + (|a| + |b|)M = 1$. Prema pretpostavci za zadani ε postoji $(m_1, n_1) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(m, n) \geq (m_1, n_1)$ vrijedi $\left|a_{m,n} - a\right| < M\varepsilon$ i postoji $(m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(m, n) \geq (m_2, n_2)$ vrijedi $\left|b_{m,n} - b\right| < M\varepsilon$. Stavimo $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ i $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi $\left|a_{m,n} - a\right| < M\varepsilon$ i $\left|b_{m,n} - b\right| < M\varepsilon$. Također, za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ imamo

$$\left|a_{m,n}\right| = \left|a_{m,n} - a + a\right| \leq \left|a_{m,n} - a\right| + |a| < M\varepsilon + |a|.$$

Stoga za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left|a_{m,n}b_{m,n} - ab\right| &= \left|a_{m,n}b_{m,n} - a_{m,n}b + a_{m,n}b - ab\right| \\ &\leq \left|a_{m,n}b_{m,n} - a_{m,n}b\right| + \left|a_{m,n}b - ab\right| \\ &= \left|a_{m,n}\right| \left|b_{m,n} - b\right| + \left|a_{m,n} - a\right| |b| \\ &< (M\varepsilon + |a|)M\varepsilon + M\varepsilon|b| \\ &= \left(\varepsilon M^2 + (|a| + |b|)\, M\right)\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Time smo dokazali da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n}b_{m,n} = ab$.

(iii) Neka je zadano $\varepsilon > 0$. Neka je $M = \frac{|b|^2}{|a|+(1+\varepsilon)|b|}$. Prema pretpostavci postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi $\left|a_{m,n} - a\right| < M\varepsilon$ i $\left|b_{m,n} - b\right| < M\varepsilon$. Također, za sve $(m, n) \geq (m_0, n_0)$ imamo

$$\left|b_{m,n}\right| = \left|b_{m,n} - b + b\right| \geq |b| - \left|b_{m,n} - b\right| > |b| - M\varepsilon > 0,$$

tj. $\frac{1}{|b_{m,n}|} < \frac{1}{|b|-M\varepsilon}$. Stoga za sve $(m,n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{m,n}}{b_{m,n}} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|a_{m,n}b - ab_{m,n}|}{|b_{m,n}||b|} \\
&= \frac{|a_{m,n}b - ab + ab - ab_{m,n}|}{|b_{m,n}||b|} \\
&\leq \frac{|b||a_{m,n} - a| + |a||b - b_{m,n}|}{|b_{m,n}||b|} \\
&< \frac{|b|M\varepsilon + |a|M\varepsilon}{(|b| - M\varepsilon)|b|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} \frac{a_{m,n}}{b_{m,n}} = \frac{a}{b}$. □

Propozicija 1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $a \in S$. Ako dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ u S konvergira prema točki a, onda dvostruko indeksirani niz $(f(a_{m,n}))$ konvergira prema točki $f(a)$.*

Dokaz. Neka je zadano $\varepsilon > 0$. Kako je funkcija f neprekidna u točki a, to postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ za koji je $|x - a| < \delta$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Kako je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, to za dani δ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(m,n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi $|a_{m,n} - a| < \delta$. Stoga za sve $(m,n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi $|f(a_{m,n}) - f(a)| < \varepsilon$. Dakle, $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} f(a_{m,n}) = f(a)$. □

Korolar 1.5. *Ako je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, onda je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |a_{m,n}| = |a|$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.4 budući da je funkcija $x \mapsto |x|$ neprekidna na $\mathbb{R}$. □

Korolar 1.6. *Ako je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, pri čemu je $a_{m,n} \geq 0$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, onda je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n}^{1/k} = a^{1/k}$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.4 budući da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto x^{1/k}$ neprekidna na intervalu $[0, \infty)$. □

Korolar 1.7. (i) *Ako je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, onda je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} (ra_{m,n}) = ra$ za bilo koji $r \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Ako je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, pri čemu je $a_{m,n} \neq 0$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ i $a \neq 0$, onda je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} \frac{1}{a_{m,n}} = \frac{1}{a}$.*

Dokaz. (i) Tvrdnja slijedi iz teorema 1.3 (ii).

(ii) Tvrdnja slijedi iz teorema 1.3 (iii), odnosno iz propozicije 1.4.

□

Teorem 1.8 (Teorem o sendviču za dvostruko indeksirane nizove)**.** *Ako su* $(a_{m,n}), (b_{m,n})$ *i* $(c_{m,n})$ *dvostruko indeksirani nizovi takvi da je* $a_{m,n} \leq c_{m,n} \leq b_{m,n}$ *za sve* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ *i ako je* $c \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = c$ *i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} b_{m,n} = c$*, onda je i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} c_{m,n} = c$.

Dokaz. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(m,n) \geq (m_0, n_0)$ vrijedi $\left|a_{m,n} - c\right| < \varepsilon$ i $\left|b_{m,n} - c\right| < \varepsilon$. S obzirom da pretpostavka teorema povlači $a_{m,n} - c \leq c_{m,n} - c \leq b_{m,n} - c$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, slijedi $-\varepsilon < c_{m,n} - c < \varepsilon$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan slijedi da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} c_{m,n} = c$. □

Definicija 1.9 (Cauchyjev dvostruko indeksirani niz)**.** *Kažemo da je dvostruko indeksirani niz* $(a_{m,n})$ *Cauchyjev dvostruko indeksirani niz ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ *takav da vrijedi* $\left|a_{m,n} - a_{p,q}\right| < \varepsilon$ *za sve* $(m,n), (p,q) \geq (m_0, n_0)$.

Sljedeći rezultat nam omogućuje da dokažemo konvergenciju dvostruko indeksiranog niza bez da unaprijed tražimo njegovu graničnu vrijednost.

Propozicija 1.10 (Cauchyjev kriterij za dvostruko indeksirane nizove)**.** *Dvostruko indeksirani niz je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev dvostruko indeksirani niz.*

Dokaz. Lako se vidi da je konvergentan dvostruko indeksirani niz i Cauchyjev dvostruko indeksirani niz.

S druge strane, neka je $(a_{m,n})$ Cauchyjev dvostruko indeksirani niz i razmotrimo dijagonalni niz (b_n) definiran kao $b_n := a_{n,n}$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je očito (b_n) Cauchyjev niz te po Cauchyjevom kriteriju za nizove je (b_n) konvergentan niz. Neka je $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i neka je zadan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $n \geq n_0$. Budući da je $(a_{m,n})$ Cauchyjev, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_1 \geq n_0$ i $\left|a_{m,n} - a_{p,q}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $(m,n), (p,q) \geq (n_1, n_1)$. Stoga je

$$\left|a_{m,n} - b\right| \leq \left|a_{m,n} - a_{n_1,n_1}\right| + \left|b_{n_1} - b\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za sve $(m,n) \geq (n_1, n_1)$. Tada je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = b$. □

Teorem 1.11 (Uzastopni limesi za dvostruko indeksirane nizove)**.** *Neka je* $(a_{m,n})$ *konvergentan dvostruko indeksirani niz i* $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$.

(i) *Ako postoji* $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ *za svaki* $m \in \mathbb{N}$*, onda uzastopni limes*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right)$$

postoji i jednak je a.

(ii) *Ako postoji* $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, onda uzastopni limes*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right)$$

postoji i jednak je a*.*

(iii) *Ako vrijede pretpostavke iz* (i) *i* (ii)*, onda je dvostruko indeksirani niz* $(a_{m,n})$ *ograničen i vrijedi*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right) = a = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right).$$

Dokaz. (i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = a$, tada postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da vrijedi

$$\left|a_{m,n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za sve } (m,n) \geq (m_0, n_0)\,.$$

Pretpostavimo da $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ postoji za svaki $m \in \mathbb{N}$ i označimo ga s b_m. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$ postoji $k_m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|a_{m,n} - b_m\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za sve } n \geq k_m.$$

Za $m \geq m_0$, ako označimo s $n_m := \max\{n_0, k_m\}$, imamo

$$|b_m - a| \leq \left|b_m - a_{m,n_m}\right| + \left|a_{m,n_m} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tada postoji $\lim_{m\to\infty} b_m$ i jednak je a.

(ii) Dokaz je analogan dokazu (i).

(iii) Pretpostavimo da vrijede pretpostavke iz (i) i (ii). Budući da je $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} |a_{m,n}| = |a|$, tada postoji $(m_1, n_1) \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\left|a_{m,n}\right| < 1 + |a| \quad \text{za sve } (m,n) \geq (m_1, n_1)\,.$$

Također, za svaki fiksni m, $1 \leq m < m_1$, niz $(a_{m,n})$ je ograničen budući da $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ postoji. Tako postoji $\alpha \geq 0$ takav da je $\left|a_{m,n}\right| \leq \alpha$ za $1 \leq m < m_1$ i $n \in \mathbb{N}$. Slično, postoji $\beta \geq 0$ takav da je $\left|a_{m,n}\right| \leq \beta$ za $m \in \mathbb{N}$ i $1 \leq n < n_1$. Stoga je $\left|a_{m,n}\right| \leq \max\{1 + |\alpha|, \alpha, \beta\}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Prema tome, dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ je ograničen. Ostali dio dokaza (iii) slijedi iz (i) i (ii). □

Sada ćemo navesti primjere koji pokazuju da ako neka od pretpostavki u prethodnom teoremu ne vrijedi, onda ne moraju vrijediti zaključci.

Primjer 1.1.3. (i) Neka je $a_{m,n} := (-1)^{m+n}\frac{(m+n)}{mn}$ za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Budući da je $\left|a_{m,n}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ vidimo da $a_{m,n} \longrightarrow 0$. Međutim, $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ ne postoji za niti jedan fiksni $m \in \mathbb{N}$. Zaista,

$$a_{m,n} = (-1)^m \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{m}\right] \quad \text{za sve } (m,n) \in \mathbb{N}^2$$

i $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, dok $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{m}$ ne postoji.

(ii) Neka je $a_{m,n} := \frac{mn}{m^2+n^2}$ za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$, postoji $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$ i jednak je 0 budući da je $\left|a_{m,n}\right| \leq \frac{m}{n}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}$.
Slično, za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ postoji i jednak je 0. Međutim, dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ nije konvergentan, budući da je $a_{m,n} = \frac{1}{2}$ za $m = n$ i $a_{m,n} = \frac{2}{5}$ za $m = 2n$.

(iii) Neka je $a_{m,n} := \frac{m}{m+n}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = 0$ i za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$ je $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 1$. Stoga, imamo da je $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}) = 0$ i $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}) = 1$. Uočavamo da dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ nije konvergentan budući da je $a_{m,n} = \frac{1}{2}$ za $m = n$ i $a_{m,n} = \frac{2}{3}$ za $m = 2n$.

1.2 Monotonost i bimonotonost

Kažemo da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ *monotono rastući* ako je $a_{m,n} \leq a_{m+1,n}$ i $a_{m,n} \leq a_{m,n+1}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Isto tako, kažemo da je $(a_{m,n})$ *monotono padajući* ako je $a_{m,n} \geq a_{m+1,n}$ i $a_{m,n} \geq a_{m,n+1}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

Uočimo da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ monotono rastući ako i samo ako vrijedi $a_{m,n} \leq a_{p,q}$ za sve $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2$ takve da je $(m,n) \leq (p,q)$. Također, dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ je monotono rastući ako i samo ako za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$ je niz dan s $n \mapsto a_{m,n}$ monotono rastući i za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$ je niz dan s $m \mapsto a_{m,n}$ monotono rastući. Slično vrijedi i za monotono padajuće dvostruko indeksirane nizove.

Za dvostruko indeksirani niz kažemo da je *monoton* ako je monotono rastući ili monotono padajući.

Vidjeli smo da konvergentan dvostruko indeksirani niz ne mora biti ograničen i da ograničen dvostruko indeksirani niz ne mora biti konvergentan. Na to nadovezujemo sljedeći rezultat.

Teorem 1.12. (i) *Monotono rastući dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ je konvergentan ako i samo ako je ograničen odozgo. U tom slučaju,*

$$a_{m,n} \to \sup\left\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Ako je $(a_{m,n})$ monotono rastući, ali nije ograničen odozgo, onda $a_{m,n} \to \infty$.

(ii) *Monotono padajući dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ je konvergentan ako i samo ako je ograničen odozdo. U tom slučaju,*

$$a_{m,n} \to \inf\left\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Ako je $(a_{m,n})$ monotono padajući, ali nije ograničen odozdo, onda $a_{m,n} \to -\infty$.

Dokaz. (i) Neka je $(a_{m,n})$ monotono rastući dvostruko indeksirani niz. Pretpostavimo da je ograničen odozgo i neka je $a := \sup\left\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $a - \varepsilon < a_{m_0,n_0}$. Stoga vrijedi

$$a - \varepsilon < a_{m_0,n_0} \leq a_{m,n} \leq a < a + \varepsilon \quad \text{za sve } (m,n) \geq (m_0, n_0).$$

Tako imamo da $a_{m,n} \to a$.

Obratno, pretpostavimo da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ konvergentan i $a_{m,n} \to a$. Tada postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da vrijedi

$$a_{m,n} < a + 1 \quad \text{za sve } (m,n) \geq (m_0, n_0).$$

Sada za svaki $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ imamo $(m + m_0, n + n_0) \geq (m,n)$ i $(m + m_0, n + n_0) \geq (m_0, n_0)$ te

$$a_{m,n} \leq a_{m+m_0,n+n_0} < a + 1.$$

Zaključujemo da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ ograničen odozgo s $a + 1$.

Ako $(a_{m,n})$ nije ograničen odozgo, tada za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $a_{m_0,n_0} > \alpha$. Ali tada je $a_{m,n} \geq a_{m_0,n_0} > \alpha$ za sve $(m,n) \geq (m_0, n_0)$. Tako da imamo $a_{m,n} \to \infty$.

(ii) Dokaz je analogan dokazu tvrdnje (i). □

Korolar 1.13. *Monotoni dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ je konvergentan ako i samo ako je niz $\left(a_{p,p}\right)$ konvergentan. U tom slučaju vrijedi*

$$\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} a_{m,n} = \lim_{p\to\infty} a_{p,p}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(a_{m,n})$ monotono rastući niz. Ako za proizvoljni $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ definiramo $p := \max\{m,n\}$, tada je $a_{m,n} \leq a_{p,p}$. To povlači da je $\left\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ ograničen odozgo ako i samo ako je $\left\{a_{p,p} : p \in \mathbb{N}\right\}$ ograničen odozgo i u tom slučaju vrijedi $\sup\left\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} = \sup\left\{a_{p,p} : p \in \mathbb{N}\right\}$. Stoga, po teoremu 1.12 (i) i analogonima za nizove dobivamo željeni rezultat. Slučaj kada je $(a_{m,n})$ monoton padajući dvostruko indeksirani niz se slično dokazuje. □

Sada uvodimo pojmove koje ćemo koristiti kasnije pri razmatranju uvjetne konvergencije dvostrukog reda.

Kažemo da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ *bimonotono rastući* ako vrijedi $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} \leq a_{m,n} + a_{m+1,n+1}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Slično, kažemo da je $(a_{m,n})$ *bimonotono padajući* ako vrijedi $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} \geq a_{m,n} + a_{m+1,n+1}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Uočimo da za bilo koje $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2$ takve da je $(m,n) \leq (p,q)$ vrijedi

$$a_{m,n} + a_{p,q} - a_{m,q} - a_{p,n} = \sum_{i=m}^{p-1} \sum_{j=n}^{q-1} \left(a_{i,j} + a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1} - a_{i+1,j} \right).$$

Stoga je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ bimonotono rastući ako i samo ako je

$$a_{m,q} + a_{p,n} \leq a_{m,n} + a_{p,q} \text{ za sve } (m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ takve da je } (m,n) \leq (p,q).$$

Lako se vidi da slična karakterizacija vrijedi i za bimonotone padajuće nizove. Za dvostruko indeksirani niz kažemo da je *bimonoton* ako je bimonotono rastući ili bimonotono padajući.

Sljedeća propozicija se često koristi za konstruiranje primjera monotonih i bimonotonih dvostruko indeksiranih nizova.

Propozicija 1.14. *Neka su (α_n) i (β_n) nizovi realnih brojeva, a $(a_{m,n})$ i $(b_{m,n})$ dvostruko indeksirani nizovi definirani kao*

$$a_{m,n} := \alpha_m + \beta_n \text{ i } b_{m,n} := \alpha_m \beta_n \text{ za } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Vrijede sljedeće tvrdnje.

(i) *$(a_{m,n})$ je monotono rastući (odnosno monotono padajući) ako i samo ako su oba niza (α_n) i (β_n) monotono rastuća (odnosno monotono padajuća).*

(ii) *Pretpostavimo da su $\alpha_n \geq 0$ i $\beta_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te da je $\alpha_{m_0} > 0$ i $\beta_{n_0} > 0$ za neke $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$. Tada je $(b_{m,n})$ monotono rastući (odnosno monotono padajući) ako i samo ako su oba niza (α_n) i (β_n) monotono rastuća (odnosno monotono padajuća).*

(iii) *$(a_{m,n})$ je uvijek bimonotono rastući i bimonotono padajući.*

(iv) *Ako su (α_n) i (β_n) monotoni, onda je $(b_{m,n})$ bimonoton. Preciznije, ako su (α_n) i (β_n) oba rastući ili oba padajući, onda je $(b_{m,n})$ bimonotono rastući, a ako je (α_n) rastući i (β_n) padajući ili obrnuto, onda je $(b_{m,n})$ bimonotono padajući.*

Dokaz. Dokazi tvrdnji (i) i (ii) su neposredna posljedica definicije, a (iii) i (iv) slijede iz $a_{p,q} + a_{m,n} = a_{m,q} + a_{p,n}$ i $b_{p,q} + b_{m,n} - b_{m,q} - b_{p,n} = \left(\alpha_p - \alpha_m\right)\left(\beta_q - \beta_n\right)$ za sve $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2$. □

Primjer 1.2.1. Neka su $a_{m,n} := m + n$ i $b_{m,n} := mn$ za $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Tada su oba dvostruko indeksirana niza $(a_{m,n})$ i $(b_{m,n})$ monotono rastuća kao i bimonotono rastuća. S druge strane, ako je $c_{m,n} := m - n$ za $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, tada je dvostruko indeksirani niz $(c_{m,n})$ bimonoton, ali nije monoton. Za $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ neka je

$$d_{m,n} := \begin{cases} -1, & \text{ako je } m = 1 = n, \\ mn, & \text{ako je } m > 1 \text{ ili } n > 1. \end{cases}$$

Tada je dvostruko indeksirani niz $(d_{m,n})$ monotono rastući, ali nije bimonoton budući da je $d_{1,2} + d_{2,1} = 4 > 3 = d_{1,1} + d_{2,2}$ i $d_{2,3} + d_{3,2} = 12 < 13 = d_{2,2} + d_{3,3}$.

Poglavlje 2

Dvostruki redovi

2.1 Konvergencija dvostrukog reda

Definicija 2.1. *Dvostruki red realnih brojeva je uređeni par* $((a_{k,l}), (A_{m,n}))$ *dvostruko indeksiranih nizova realnih brojeva takvih da*

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \text{ za sve } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Jasno je da za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ gore navedena konačna dvostruka suma ne ovisi o međusobnom poretku suma.

Ekvivalentno, dvostruki red je uređeni par $((a_{k,l}), (A_{m,n}))$ dvostruko indeksiranih nizova realnih brojeva takvih da

$$a_{k,l} = A_{k,l} - A_{k,l-1} - A_{k-1,l} + A_{k-1,l-1} \text{ za sve } (k,l) \in \mathbb{N}^2,$$

gdje je $A_{k,0} := 0$ za sve $k = 0, 1, 2, \dots$ i $A_{0,l} := 0$ za sve $l = 0, 1, 2, \dots$, uz dogovor da je prazna suma jednaka nuli. $a_{k,l}$ se zove *opći* ili (k,l)*-ti član dvostrukog reda*, a $A_{m,n}$ se zove (m,n)*-ta parcijalna dvostruka suma dvostrukog reda* $((a_{k,l}), (A_{m,n}))$. Dva dvostruko indeksirana niza $(a_{k,l})$ i $(A_{m,n})$ jedinstveno određuju jedan drugoga. Koristit ćemo neformalnu, ali sugestivnu notaciju $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ za dvostruki red $((a_{k,l}), (A_{m,n}))$. Ponekad je prikladno koristiti indekse k i l za vrijednosti $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ i $l = l_0, l_0 + 1, \dots$ za neki fiksni par (k_0, l_0) cijelih brojeva.

Kažemo da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *konvergentan* ako je dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ njegovih parcijalnih dvostrukih suma konvergentan. Ako $(A_{m,n})$ konvergira k A, tada (jedinstveni) realni broj A zovemo *dvostruka suma* dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i bilježimo je istim simbolom kao što bilježimo dvostruki red. Dakle, kada pišemo

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = A,$$

mislimo da dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergira i njegova dvostruka suma je realan broj A. U ovom slučaju, možemo reći da $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *konvergira* k A. Za dvostruki red koji ne konvergira, kažemo da *divergira*. Posebno, kažemo da dvostruki red *divergira* k ∞ ili k $-\infty$ kada dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda divergira k ∞ ili k $-\infty$.

Na konvergenciju dvostrukog reda ne utječe ako promijenimo konačan broj njegovih članova, iako se njegova dvostruka suma može mijenjati na taj način. S druge strane, ako promijenimo beskonačno mnogo njegovih članova (čak i ako pripadaju jednom retku ili jednom stupcu) možemo utjecati na konvergenciju dvostrukog reda. Na primjer, ako je $a_{k,l} := 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, tada je očito $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan. Ali ako imamo $b_{k,1} := 1$ za $k \in \mathbb{N}$ i $b_{k,l} := 0$ za sve $(k,l) \geq (1,2)$, tada $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ divergira k ∞. (Ovo je suprotnost efektu konvergencije dvostruko indeksiranog niza kada se neki od njegovih članova promijene.)

Primijetimo da se red $\sum_k a_k$ može promatrati kao dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ ako definiramo $a_{k,1} := a_k$ za $k \in \mathbb{N}$ i $a_{k,l} := 0$ za sve $(k,l) \geq (1,2)$. U ovom slučaju, $A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} a_k$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Posljedično, primjeri koji se razmatraju u teoriji redova vrijede također za dvostruke redove. Kao i u slučaju redova, brz i koristan način za pokazati da je dvostruki red divergentan je koristiti sljedeći rezultat koji daje nužni uvjet za konvergenciju dvostrukih redova.

Propozicija 2.2 (Nužni uvjet konvergencije dvostrukog reda)**.** *Ako je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan, onda je $\lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} a_{k,l} = 0$. Drugim riječima, ako $(a_{k,l})$ ne konvergira k nuli, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.*

Dokaz. Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan dvostruki red. Ako je $A_{m,n}$ (m,n)-ta parcijalna dvostruka suma dvostrukog reda i A njegova dvostruka suma, onda imamo

$$\lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} a_{k,l} = \lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} (A_{k,l} - A_{k-1,l} - A_{k,l-1} + A_{k-1,l-1}) = A - A - A + A = 0.$$

□

U nastavku ovog rada ćemo vidjeti da dvostruki redovi $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{kl}$ i $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k+l}$ divergiraju k ∞ iako njihov (k,l)-ti član teži u 0 kada $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Dakle, tvrdnja o nužnom uvjetu konvergencije iz prethodne propozicije ne vrijedi u obrnutom smjeru.

Sljedeći rezultat daje dovoljan uvjet za konvergenciju "produkta redova" i često je koristan.

Teorem 2.3. *Neka su $\sum_k b_k$ i $\sum_l c_l$ redovi realnih brojeva i neka je $a_{k,l} := b_k c_l$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Ako su oba reda $\sum_k b_k$ i $\sum_l c_l$ konvergentna, onda je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan i vrijedi $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \left(\sum_k b_k\right)\left(\sum_l c_l\right)$.*

(ii) *Ako oba reda* $\sum_k b_k$ *i* $\sum_l c_l$ *divergiraju k* ∞*, onda dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *divergira k* ∞*.*

(iii) *Ako* $\sum_k b_k$ *konvergira k* B *i* $B \neq 0$*, dok* $\sum_l c_l$ *divergira, onda dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} b_k c_l$ *divergira.*

Dokaz. Označimo s B_m m-tu parcijalnu sumu reda $\sum_k b_k$ i s C_n n-tu parcijalnu sumu reda $\sum_l c_l$. Neka je $A_{m,n}$ (m,n)-ta parcijalna dvostruka suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$. Tada je

$$A_{m,n} = \Big(\sum_{k=1}^{m} b_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} c_l\Big) = B_m C_n \quad \text{za sve } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Posljedično, ako $B_m \to B$ i $C_n \to C$ za neke $B, C \in \mathbb{R}$, onda $A_{m,n} \to BC$. Također, ako $B_m \to \infty$ i $C_n \to \infty$, onda $A_{m,n} \to \infty$. To dokazuje tvrdnje (i) i (ii). Osim toga, ako $B_m \to B$ gdje je $B \neq 0$ i ako $A_{m,n} \to A$, onda $C_n \to \frac{A}{B}$. To dokazuje tvrdnju (iii). □

U sljedećim primjerima i do kraja ovog rada, smatrat ćemo da je $x^0 = 1$ za bilo koji $x \in \mathbb{R}$ (uključujući i $x = 0$).

Primjer 2.1.1. (i) (*Geometrijski dvostruki red*) Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Definiramo $a_{k,l} := x^k y^l$ za nenegativne cijele brojeve k i l. Primijetimo da je $a_{0,0} = 1, a_{k,0} = x^k$ i $a_{0,l} = y^l$ za $k, l \in \mathbb{N}$. Dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, pri čemu indeks (k,l) prolazi skupom parova nenegativnih cijelih brojeva, se zove *geometrijski dvostruki red*. Znamo da geometrijski red $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergira ako i samo ako $|x| < 1$. Stoga, iz teorema 2.3 (i) vidimo da geometrijski dvostruki red konvergira ako je $|x| < 1$ i $|y| < 1$; štoviše imamo

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} x^k y^l = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \quad \text{za } |x| < 1 \text{ i } |y| < 1.$$

Nadalje, ako je $|x| \geq 1$ i $|y| \geq 1$, onda je $\left|x^k y^l\right| = |x|^k |y|^l \geq 1$ za sve nenegativne cijele brojeve k i l. Stoga, iz propozicije 2.2 vidimo da je geometrijski dvostruki red divergentan. Konačno, budući da je $\frac{1}{1-z}$ različit od 0 kad god je $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$, slijedi iz teorema 2.3 (iii) da ako je jedan od brojeva $|x|$ i $|y|$ strogo manji od 1, a drugi veći ili jednak 1, onda je geometrijski dvostruki red divergentan. Dakle, vidimo da je geometrijski dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} x^k y^l$ konvergentan ako i samo ako je $|x| < 1$ i $|y| < 1$.

(ii) (*Eksponencijalni dvostruki red*) Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Definirajmo $a_{k,l} := \frac{x^k y^l}{k!l!}$ za nenegativne cijele brojeve k i l. Dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, gdje indeks (k,l) prolazi skupom parova nenegativnih cijelih brojeva, se zove *eksponencijalni dvostruki red*. Iz teorema 2.3 (i) lako vidimo da je eksponencijalni dvostruki red uvijek konvergentan i vrijedi

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum\sum_{(k,l)\geq(0,0)} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!} = e^x e^y = e^{x+y} \quad \text{za } x, y \in \mathbb{R}.$$

(iii) (*Harmonijski dvostruki red i njegove varijante*) Dvostruki redovi $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{kl}$ i $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k+l}$ se mogu promatrati kao analogija harmonijskog reda $\sum_k \frac{1}{k}$ i stoga se bilo koji od ta dva dvostruka reda može smatrati *harmonijskim dvostrukim redom.* Iz teorije redova znamo da harmonijski red divergira k ∞. Stoga iz teorema 2.3 (ii) vidimo da dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{kl}$ divergira k ∞. Općenito, za bilo koji $p \in \mathbb{R}$, znamo da je red $\sum_k \frac{1}{k^p}$ konvergentan za $p > 1$ (u tom slučaju, suma je očito različita od nule) i divergira k ∞ za $p \leq 1$. Dakle, koristeći teorem 2.3 (i), (ii) i (iii), vidimo da za bilo koji $p, q \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k^p l^q} \text{ je konvergentan } \Leftrightarrow p > 1 \text{ i } q > 1.$$

Druga varijanta harmonijskog reda, odnosno dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k+l}$ također divergira k ∞, budući da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{k+l} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{kl} \quad \text{za sve } (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Promotrimo sada dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{(k+l)^2}$. Za $n \in \mathbb{N}$, neka je $A_{n,n} := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{(k+l)^2}$. Ako je $n \geq 3$ i $i = 2, \ldots, n-1$, onda je svaki od $i-1$ pribrojnika

$$\frac{1}{[1+(i-1)]^2}, \frac{1}{[2+(i-2)]^2}, \ldots, \frac{1}{[(i-2)+2]^2}, \frac{1}{[(i-1)+1]^2}$$

od $A_{n,n}$ jednak $\frac{1}{i^2}$ te stoga vrijedi

$$A_{n,n} \geq \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i-1}{i^2} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Budući da $\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i} \to \infty$ kada $n \to \infty$, vidimo da $A_{n,n} \to \infty$ kada $n \to \infty$. Zaključujemo da dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{(k+l)^2}$ divergira k ∞. To ukazuje da prag za konvergenciju dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{(k+l)^p}$ nije $p = 1$. Štoviše, kasnije ćemo pokazati da dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{(k+l)^p}$ konvergira ako i samo ako je $p > 2$.

(iv) (*Alternirajući dvostruki red*) Iz teorije redova znamo da je red $\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergentan. Stoga iz teorema 2.3 (i) vidimo da je odgovarajući alternirajući dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{kl}$ konvergentan. Općenito, neka je $p \in \mathbb{R}$. Znamo da je red $\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k^p}$ konvergentan ako i samo ako je $p > 0$. Osim toga, ako za $n \in \mathbb{N}$ označimo s A_n n-tu parcijalnu sumu reda $\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k^p}$, imamo

$$A_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + B_n, \text{ gdje je } B_n := \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p}\right),$$

i budući da je $B_n \geq 0$ vidimo da je $A_{2n} \geq 1 - 2^{-p}$. Ako je $p > 0$, onda je $\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{k^p} \geq 1 - 2^{-p} > 0$. S obzirom na ovo, iz teorema 2.3 (i) i (iii) te propozicije 2.2 slijedi da za bilo koji $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{k^p l^q} \text{ je konvergentan } \Leftrightarrow p > 0 \text{ i } q > 0.$$

Kasnije ćemo vidjeti da je alternirajući dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{(k+l)^p}$ konvergentan ako i samo ako je $p > 0$.

Sljedeće tvrdnje o konvergenciji dvostrukih redova slijede iz odgovarajućih tvrdnji o konvergenciji dvostruko indeksiranih nizova.

1. (*Granični teorem*) Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = A$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l} = B$. Tada vrijedi

$$\sum\sum_{(k,l)} (a_{k,l} + b_{k,l}) = A + B \text{ i } \sum\sum_{(k,l)} (ra_{k,l}) = rA \text{ za bilo koji } r \in \mathbb{R}.$$

   Nadalje, ako je $a_{k,l} \leq b_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, onda je $A \leq B$.

2. (*Teorem o sendviču*) Neka su $(a_{k,l})$, $(b_{k,l})$ i $(c_{k,l})$ dvostruko indeksirani nizovi realnih brojeva takvi da vrijedi $a_{k,l} \leq c_{k,l} \leq b_{k,l}$ za svaki $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = A$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l} = A$. Tada je $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} = A$.

3. (*Cauchyjev kriterij*) Dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da

$$\left| \sum_{k=p+1}^{m} \sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=p+1}^{m} \sum_{l=1}^{q} a_{k,l} \right| < \varepsilon$$

   za sve $(m,n) \geq (p,q) \geq (m_0, n_0)$.

Dokaz. Prva tvrdnja je posljedica teorema 1.3, a druga teorema 1.8. Za dokaz treće tvrdnje, dovoljno je uočiti da je

$$\sum_{k=p+1}^{m}\sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=q+1}^{n} a_{k,l} + \sum_{k=p+1}^{m}\sum_{l=1}^{q} a_{k,l} = A_{m,n} - A_{p,q}$$

za sve $(m,n) \geq (p,q)$ i primijeniti propoziciju 1.10. □

Razmotrimo sada kako se konvergencija dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ odnosi prema konvergenciji *uzastopnih redova* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ i $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$. U tu svrhu i za kasniju upotrebu, koristimo sljedeću terminologiju: za svaki fiksni $k \in \mathbb{N}$, red $\sum_l a_{k,l}$ se zove *redak-red*, a za svaki fiksni $l \in \mathbb{N}$ se red $\sum_k a_{k,l}$ zove *stupac-red* (koji odgovaraju dvostrukom redu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$).

Teorem 2.4 (Fubinijev teorem za dvostruke redove)**.** *Pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan dvostruki red i neka je A njegova dvostruka suma.*

(i) *Ako je za svaki $k \in \mathbb{N}$ redak-red $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}$ konvergentan, onda je odgovarajući uzastopni red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ konvergentan i njegova suma je jednaka A.*

(ii) *Ako je za svaki $l \in \mathbb{N}$ stupac-red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}$ konvergentan, onda je odgovarajući uzastopni red $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ konvergentan i njegova suma je jednaka A.*

(iii) *Ako je svaki redak-red $\sum_l a_{k,l}$ kao i stupac-red $\sum_k a_{k,l}$ konvergentan, onda je dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ ograničen i vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

Dokaz. Označimo s $(A_{m,n})$ dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$. Prema našoj pretpostavci, $(A_{m,n})$ konvergira k A.

Pretpostavimo da je svaki redak-red konvergentan. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} A_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

Stoga, prema teoremu 1.11 (i), uzastopni limes $\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} A_{m,n}\right)$ postoji i jednak je A, odnosno,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = A.$$

Prema tome, uzastopni red $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l})$ je konvergentan i njegova suma je jednaka A. Time je dokazano (i). Analogno se dokazuje (ii).

Konačno, pretpostavimo da je svaki redak-red kao i stupac-red konvergentan. Tada za svaki fiksni $m \in \mathbb{N}$ postoji $\lim_{n\to\infty} A_{m,n}$ i za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$ postoji $\lim_{m\to\infty} A_{m,n}$. Stoga, prema teoremu 1.11 (iii) je $(A_{m,n})$ ograničen. Drugi dio tvrdnje (iii) slijedi iz (i) i (ii). $\square$

Primjer 2.1.2. (i) Čak i ako dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergira, oba uzastopna reda mogu divergirati. Na primjer, promatrajmo dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ prikazan shematski:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & -3 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Tada je $A_{1,n} = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $A_{m,1} = m$ za sve $m \in \mathbb{N}$, dok je $A_{m,n} = 0$ za sve $(m,n) \geq (2,2)$. Stoga je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)} A_{m,n} = 0$. Međutim, $\sum_{l=1}^{n} a_{1,l} = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{l=1}^{n} a_{2,l} = -n$ za sve $n \geq 2$, dok je $\sum_{k=1}^{m} a_{k,1} = m$ za sve $m \in \mathbb{N}$ i $\sum_{k=1}^{m} a_{k,2} = -m$ za sve $m \geq 2$. Stoga, $\sum_{l=1}^{\infty} a_{1,l}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1}$ divergiraju k ∞, dok $\sum_{l=1}^{\infty} a_{2,l}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2}$ divergiraju k $-\infty$. Očito, niti jedan uzastopni red čak nije dobro definiran.

(ii) Čak i ako oba uzastopna reda $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l})$ i $\sum_{l=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l})$ konvergiraju i imaju istu sumu, dvostruki red može divergirati. Na primjer, promotrimo dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ prikazan shematski:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Tada imamo da je $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = 1$ za $k = 1$ i $k = 2$, a $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = 0$ za $k \geq 3$. Slično, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} = 1$ za $l = 1$ i $l = 2$, a $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} = 0$ za $l \geq 3$. Dakle, imamo $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}) = 2 = \sum_{l=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l})$. Ali, $A_{m,m} = 4$ za sve $m \geq 2$ i $A_{m,m-1} = 3$ za sve $m \geq 3$, tako da je dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ divergentan, odnosno, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.

(iii) Čak i ako oba uzastopna reda $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l})$ i $\sum_{l=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l})$ konvergiraju, njihove sume ne moraju biti jednake. Na primjer, promotrimo dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$

prikazan shematski:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Tada imamo da je $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = 1$ za $k = 1$ i $\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = 0$ za $k \geq 2$, dok je $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} = -1$ za $l = 1$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} = 0$ za $l \geq 2$. Stoga, imamo $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = 1$ i $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = -1$. Naravno, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergira, budući da je $A_{m,m} = 0$ za sve $m \in \mathbb{N}$ i $A_{m,m-1} = -1$ za sve $m \geq 2$.

2.2 Teleskopski dvostruki red

Teleskopski red je red oblika

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}),$$

gdje je (b_k) niz realnih brojeva. Uočimo da je k-ta parcijalna suma s_k toga reda jednaka

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{k+1}.$$

Stoga je teleskopski red konvergentan ako i samo ako je niz (b_k) konvergentan, i u tom slučaju je

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}(b_1 - b_{k+1}) = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Ako je $(b_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva, tada se dvostruki red

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} (b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1})$$

zove *teleskopski dvostruki red*. Imamo sljedeći rezultat u vezi njegove konvergencije.

Propozicija 2.5. *Teleskopski dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} (b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1})$ je konvergentan ako i samo ako je dvostruko indeksirani niz $(b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l})$ konvergentan, i u ovom slučaju*

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} (b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}) = b_{1,1} - \lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} (b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l}).$$

Dokaz. Neka je $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}) = b_{1,1} - b_{m+1,1} - b_{1,n+1} + b_{m+1,n+1}.$$

Ovo dokazuje željeni rezultat. □

Uočimo da svaki dvostruki red može biti zapisan kao teleskopski dvostruki red. U osnovi, ako je $A_{m,n}$ (m,n)-ta parcijalna dvostruka suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, tada pišemo $b_{k,l} := A_{k-1,l-1}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ s uobičajnom konvencijom da su $A_{0,0}, A_{k,0}$ i $A_{0,l}$ jednaki nuli i zaključujemo da vrijedi $a_{k,l} = A_{k,l} - A_{k-1,l} - A_{k,l-1} + A_{k-1,l-1} = b_{k+1,l+1} - b_{k,l+1} - b_{k+1,l} + b_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Prethodna propozicija je posebno korisna kada je moguće zapisati $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ kao teleskopski dvostruki red bez uključivanja njegovih parcijalnih dvostrukih suma. Na primjer, promotrimo red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ gdje je

$$a_{k,l} := \frac{1}{kl(k+1)(l+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right).$$

Ako je $b_{k,l} := \frac{1}{kl}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, onda je $a_{k,l} = b_{k,l} - b_{k+1,l} - b_{k,l+1} + b_{k+1,l+1}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Budući da je $b_{1,1} = 1$ i $b_{k,1} + b_{1,l} - b_{k,l} \to 0$, iz prethodne propozicije slijedi da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{kl(k+1)(l+1)}$ konvergentan i njegova dvostruka suma je jednaka $1 - 0 = 1$.

2.3 Dvostruki red s nenegativnim članovima

Slijedi vrlo koristan nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju dvostrukog reda s nenegativnim članovima.

Teorem 2.6. *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz takav da je $a_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergira ako i samo ako je dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ njegovih parcijalnih dvostrukih suma ograničen odozgo, i u ovom slučaju*

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sup\left\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Ako $(A_{m,n})$ nije ograničen odozgo, onda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergira k ∞.

Dokaz. Budući da je $a_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, imamo $A_{m+1,n} = A_{m,n} + a_{m+1,1} + \cdots + a_{m+1,n} \geq A_{m,n}$ i $A_{m,n+1} = A_{m,n} + a_{1,n+1} + \cdots + a_{m,n+1} \geq A_{m,n}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Stoga, dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ je monotono rastući. Iz teorema 1.12 (i) vidimo da je $(A_{m,n})$ konvergentan ako i samo ako je ograničen odozgo i vrijedi

$$\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} A_{m,n} = \sup\left\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Ukoliko $(A_{m,n})$ nije ograničen odozgo, onda $A_{m,n} \to \infty$, odnosno, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergira k ∞. □

S obzirom na gornje rezultate, kada je $a_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, pišemo $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} < \infty$ ako je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan i $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \infty$ ako je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.

Prethodni teorem pokazuje da ako je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ s nenegativnim članovima konvergentan i A je njegova dvostruka suma, onda je dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ njegovih članova, kao i dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ njegovih parcijalnih dvostrukih suma, ograničen. Ovo slijedi iz toga da je u ovom slučaju $0 \leq a_{k,l} \leq A_{k,l} \leq A$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Sličan rezultat prethodnom teoremu vrijedi za dvostruke redove s nenegativnim članovima. Općenito, kada članovi $a_{k,l}$ imaju isti predznak (osim eventualno konačno mnogo njih), onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan ako i samo ako je dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ njegovih parcijalnih dvostrukih suma ograničen. Međutim, ako je beskonačno mnogo članova $a_{k,l}$ dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ pozitivno i beskonačno mnogo ih je negativno, onda dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ može divergirati čak i ako je $(A_{m,n})$ ograničen. Također, $(A_{m,n})$ može biti neograničen čak i ako je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan. Ove dvije posljednje tvrdnje su redom ilustrirane shematskim prikazima dvostrukih redova:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \qquad \text{i} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Za dvostruke redove s nenegativnim članovima, sljedeći rezlutat je poboljšanje Fubinijevog teorema za dvostruke redove (teorem 2.4).

Teorem 2.7 (Tonellijev teorem za dvostruke redove)**.** *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz takav da je $a_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) *Dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan.*

(ii) *Svaki redak-red je konvergentan i uzastopni red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ je konvergentan.*

(iii) *Svaki stupac-red je konvergentan i uzastopni red $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ je konvergentan.*

Ako vrijedi bilo koja od ove tri (ekvivalentne) tvrdnje, onda je

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (i). Ako je A dvostruka suma reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, onda prema teoremu 2.6 vrijedi $\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \leq A_{k,n} \leq A$ za svaki fiksni $k \in \mathbb{N}$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Stoga je svaki redak-red red s nenegativnim članovima čije su parcijalne sume ograničene, i stoga je taj red konvergentan. Prema Fubinijevom teoremu (teorem 2.4) slijedi da je uzastopni red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ konvergentan i njegova suma je jednaka A.

Pretpostavimo da vrijedi (ii). Tada za svaki $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ vrijedi

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

Odavde, budući da je uzastopni red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$ konvergentan, prema teoremu 2.6 vrijedi da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan. To dokazuje ekvivalenciju tvrdnji (i) i (ii).

Dokaz ekvivalencije tvrdnji (i) i (iii) se slično dokazuje.

Jednakost između dvostruke sume i sume bilo kojeg uzastopnog reda također slijedi iz ekvivalencije tvrdnji (i), (ii), (iii) i teorema 2.4. □

Primjer 2.1.2 pokazuje da nenegativnost članova dvostrukog reda u teoremu 2.7 ne može biti izostavljena.

Pitanje konvergencije dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ s nenegativnim članovima se može svesti na pitanje konvergencije svakog od sljedeća dva reda koji odgovaraju sumiranju dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ "po kvadratima" ili "po dijagonalama":

1. red $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, gdje je $b_1 = a_{1,1}$, $\displaystyle b_j := \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}$ za $j \geq 2$,

2. red $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, gdje je $\displaystyle c_j := \sum_{i=1}^{j} a_{j-i+1,i}$.

Uočimo da se c_j dobiva sumiranjem svih članova $a_{k,l}$ za čije indekse vrijedi $k + l = j + 1$. Red $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ se ponekad naziva *dijagonalan red* odgovarajućeg dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$.

Teorem 2.8. *Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ dvostruki red s nenegativnim članovima, a b_j, c_j su definirani kao prethodno. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) (*Sumiranje po pravokutnicima*) $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *je konvergentan.*

(ii) (*Sumiranje po kvadratima*) $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *je konvergentan.*

(iii) (*Sumiranje po dijagonalama*) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *je konvergentan.*

Ako vrijedi bilo koja od ove tri (ekvivalentne) tvrdnje, onda je

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j.$$

Dokaz. Za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, neka je $A_{m,n} := \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}$ i neka je $B_n := \sum_{j=1}^{n} b_j$. Tada se lako vidi da je $B_n = A_{n,n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tako da prema korolaru 1.13 su tvrdnje (i) i (ii) ekvivalentne i u ovom slučaju

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l} = \sup\left\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} = \sup\left\{B_n : n \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$, neka je $C_n := \sum_{j=1}^{n} c_j$. Znamo da se c_j dobiva sumiranjem svih članova $a_{k,l}$ za čije indekse vrijedi $k + l = j + 1$. Uočimo da ako je $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ takav da vrijedi $k + l \leq n + 1$, onda je $k \leq n$ i $l \leq n$. Ovo povlači da je $C_n \leq A_{n,n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Također, ako je $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i $(k,l) \leq (m,n)$, onda je $k + l \leq m + n = (m + n - 1) + 1$. Ovo povlači da je $A_{m,n} \leq C_{m+n-1}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Dakle, vidimo da su tvrdnje (i) i (iii) ekvivalentne, i u ovom slučaju vrijedi

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l} = \sup\left\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} = \sup\left\{C_n : n \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j.$$

□

Primjer 2.3.1. (i) Neka je $p > 0$ i neka je $a_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^p}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada je $c_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(j+1)^p} = \frac{j}{(j+1)^p}$ za sve $j \in \mathbb{N}$. Budući da vrijedi

$$\frac{1}{2(j+1)^{p-1}} \leq \frac{j}{(j+1)^p} < \frac{1}{(j+1)^{p-1}} \text{ za sve } j \in \mathbb{N},$$

red $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ je konvergentan ako i samo ako je $p > 2$. Prema teoremu 2.8 vidimo da je $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{(k+l)^p}$ konvergentan ako i samo ako je $p > 2$.

(ii) Budući da $A_{m,n} \to A$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$ povlači da $A_{n,n} \to A$ kada $n \to \infty$, vidimo u teoremu 2.8 da tvrdnja (i) povlači tvrdnju (ii) bez obzira na predznak članova dvostrukog reda. Obrnuto ne vrijedi općenito, kao što pokazuje primjer 2.1.2 (ii). U ovom primjeru, $A_{n,n} = 4$ za sve $n \geq 2$, tako da je $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 4$. Međutim, $A_{n,n+1} = 3$ za $n \geq 2$, pa dvostruki red ne konvergira.

(iii) Neka je dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ prikazan shematski na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & -2 & -1 & -1 & -1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Vidimo da je $A_{m,n} = 0$ za sve $(m,n) \geq (2,2)$ i stoga je $\sum\sum_{k,l} a_{k,l}$ konvergentan i njegova dvostruka suma je jednaka 0. Međutim, budući da je $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ i $c_j = (-1)^j$ za $j \geq 3$, vidimo da je $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ divergentan. S druge strane, primjer 2.1.2 (ii) pokazuje da $\sum\sum_{k,l} a_{k,l}$ može biti divergentan dok je $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konvergentan. U tom primjeru, imamo da je $c_1 = 2$ i $c_j = 0$ za sve $j \geq 2$, tako da je $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 2$. Također je moguće da su i $\sum\sum_{k,l} a_{k,l}$ i $\sum_j c_j$ konvergentni, ali dvostruka suma nije jednaka "sumi po dijagonalama". Kako bismo ovo ilustrirali, promotrimo dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ prikazan shematski:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Ovdje je $A_{m,n} = 2$ za $(m,n) \geq (2,2)$ i dvostruka suma je jednaka 2. Ali, budući da je $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$, $c_j = 0$ za sve $j \geq 4$ imamo da je $\sum_j c_j = 4$.

2.4 Apsolutna konvergencija i uvjetna konvergencija

Teorem 2.9. *Apsolutno konvergentan dvostruki red je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan dvostruki red. Za svaki $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ definiramo

$$a_{k,l}^{+} := \frac{|a_{k,l}| + a_{k,l}}{2}, \quad a_{k,l}^{-} := \frac{|a_{k,l}| - a_{k,l}}{2}.$$

Neka su $(A_{m,n})$, $(A_{m,n}^{+})$, $(A_{m,n}^{-})$ i $(\tilde{A}_{m,n})$ redom oznake za dvostruko indeksirane nizove parcijalnih dvostrukih suma dvostrukih redova $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{+}$, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}^{-}$ i $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$.

Prema teoremu 2.6, $(\tilde{A}_{m,n})$ je ograničen. Također vrijedi da je $0 \leq a^+_{k,l} \leq |a_{k,l}|$ i $0 \leq a^-_{k,l} \leq |a_{k,l}|$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i stoga je

$$0 \leq A^+_{m,n} \leq \tilde{A}_{m,n} \quad \text{i} \quad 0 \leq A^-_{m,n} \leq \tilde{A}_{m,n} \quad \text{za sve } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Prema tome, dvostruko indeksirani nizovi $(A^+_{m,n})$ i $(A^-_{m,n})$ su ograničeni. Prema teoremu 2.6 vidimo da su dvostruki redovi $\sum\sum_{(k,l)} a^+_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} a^-_{k,l}$ konvergentni. Vrijedi da je $a_{k,l} = a^+_{k,l} - a^-_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Stoga je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan. □

Obrat prethodnog rezultata ne vrijedi, kao što to možemo vidjeti promatrajući dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{kl}$ za koji smo pokazali da je konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan (v. primjer 2.1.1 (iii), (iv)). Za konvergentan dvostruki red koji nije apsolutno konvergentan kažemo da je *uvjetno konvergentan*.

Korisna je sljedeća karakterizacija apsolutne konvergencije.

Teorem 2.10. *Dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan ako i samo ako vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Postoje $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ i $\alpha_0 > 0$ tako da je*

$$\sum_{k=k_0}^{m} \sum_{l=l_0}^{n} |a_{k,l}| \leq \alpha_0 \text{ za sve } (m,n) \geq (k_0, l_0).$$

(ii) *Svaki redak-red kao i svaki stupac-red je apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan. Budući da je $|a_{k,l}| \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, teorem 2.6 nam govori da tvrdnja (i) vrijedi s $(k_0, l_0) := (1,1)$, a prema teoremu 2.7 vrijedi i druga tvrdnja.

Obratno, pretpostavimo da vrijede tvrdnje (i) i (ii). Neka su (k_0, l_0) i α_0 kao u tvrdnji (i). Prema (ii) znamo da za svaki fiksni $k \in \mathbb{N}$ postoji $\beta_k > 0$ takav da vrijedi $\sum_l |a_{k,l}| \leq \beta_k$ i za svaki fiksni $l \in \mathbb{N}$ postoji $\gamma_l > 0$ takav da $\sum_k |a_{k,l}| \leq \gamma_l$. Neka je $(\tilde{A}_{m,n})$ dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ i neka je $p_0 := \max\{k_0, l_0\}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{p,p} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} |a_{k,l}| &= \sum_{k=p_0}^{p} \sum_{l=p_0}^{p} |a_{k,l}| + \sum_{k=1}^{p_0-1} \sum_{l=1}^{p} |a_{k,l}| + \sum_{l=1}^{p_0-1} \sum_{k=p_0}^{p} |a_{k,l}| \\ &\leq \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p_0-1} \beta_k + \sum_{l=1}^{p_0-1} \gamma_l \quad \text{za sve } p \geq p_0.\end{aligned}$$

Ovo povlači da je dijagonalan dvostruko indeksirani niz $(\tilde{A}_{p,p})$ ograničen i dakle, prema teoremu 1.12 i korolaru 1.13, monotono rastući dvostruko indeksirani niz $(\tilde{A}_{m,n})$ je ograničen. Prema teoremu 2.6, $(\tilde{A}_{m,n})$ je konvergentan, to jest, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan. □

Napomena 2.4.1. *Obje tvrdnje* (*i*) *i* (*ii*) *iz prethodnog teorema su nužne za karakterizaciju apsolutne konvergencije. Na primjer, ako je* $a_{k,1} := 1$ *za sve* $k \in \mathbb{N}$ *i* $a_{k,l} := 0$ *za sve* $(k,l) \geq (1,2)$, *onda tvrdnja* (*i*) *vrijedi uz* $k_0 := 1$ *i* $l_0 := 2$, *ali* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *nije* (*apsolutno*) *konvergentan budući da je* $A_{m,n} = m$ *za sve* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. *S druge strane, ako je* $a_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^2}$ *za* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, *onda tvrdnja* (*ii*) *vrijedi, ali* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *nije* (*apsolutno*) *konvergentan* (*v. primjer 2.1.1* (*iii*)). *Ovo također pokazuje da niti jedna od tvrdnji* (*i*) *i* (*ii*) *teorema 2.10 ne povlači drugu.*

Sada ćemo vidjeti da neki rezultati o konvergentnim dvostrukim redovima s nenegativnim članovima također vrijede i za apsolutno konvergentne dvostruke redove.

Teorem 2.11. *Neka je* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *apsolutno konvergentan dvostruki red. Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Dvostruko indeksirani niz* $(A_{m,n})$ *parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *je ograničen.*

(ii) *Svaki redak-red kao i svaki stupac-red je apsolutno konvergentan, i vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right).$$

(iii) *Odgovarajući dijagonalni red* $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ *je apsolutno konvergentan i vrijedi*

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}.$$

Dokaz. Za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, neka su $A_{m,n}$ i $\tilde{A}_{m,n}$ redom oznake za (m,n)-te parcijalne dvostruke sume dvostrukih redova $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ i neka su A i $\tilde{A}$ redom oznake za njihove dvostruke sume.

(i) Budući da je $|A_{m,n}| \leq \tilde{A}_{m,n}$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ to je, prema teoremu 2.6, dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ ograničen.

(ii) Prema teoremu 2.10 je svaki redak-red kao i svaki stupac-red apsolutno konvergentan. Za svaki $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ definiramo

$$a_{k,l}^{+} := \frac{|a_{k,l}| + a_{k,l}}{2}, \quad a_{k,l}^{-} := \frac{|a_{k,l}| - a_{k,l}}{2}.$$

Sada se kao i u dokazu teorema 2.9 pokaže da su dvostruki redovi $\sum\sum_{(k,l)} a^+_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} a^-_{k,l}$ s nenegativnim članovima konvergentni. Stoga prema teoremu 2.7 vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a^+_{k,l}\right) = \sum\sum\nolimits_{(k,l)} a^+_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a^+_{k,l}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a^-_{k,l}\right) = \sum\sum\nolimits_{(k,l)} a^-_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a^-_{k,l}\right).$$

Budući da je $a_{k,l} = a^+_{k,l} - a^-_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, odavde slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right) = \sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right),$$

čime je tvrdnja (ii) dokazana.

(iii) Neka su $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ i $\sum_{j=1}^{\infty} d_j$ oznake za dijagonalne redove koji odgovaraju redom dvostrukim redovima $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$, i za $n \in \mathbb{N}$, neka su C_n i D_n oznake za odgovarajuće n-te parcijalne sume. Prema teoremu 2.8 slijedi $D_n \to \tilde{A}$. Ali budući da je $|c_j| \le d_j$ za sve $j \in \mathbb{N}$ i niz (D_n) je ograničen, vidimo da je niz $\left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|\right)$ ograničen, tako da red $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konvergira apsolutno. Sada se lako pokaže da je $\left|A_{n,n} - C_n\right| \le \left|\tilde{A}_{n,n} - D_n\right|$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Budući da $\tilde{A}_{n,n} \to \tilde{A}$ i također $D_n \to \tilde{A}$ vidimo da nizovi $(A_{n,n})$ i (C_n) imaju isti limes, tj. vrijedi $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$. □

Primjer 2.1.2 (ii) pokazuje da dvostruki red može divergirati čak i ako je odgovarajući dijagonalni red apsolutno konvergentan.

2.5 Bezuvjetna konvergencija

Konvergencije dvostrukog reda ovisi o redoslijedu po kojem se članovi reda sumiraju, ili preciznije, o načinu na koji se formiraju njegove parcijalne dvostruke sume (grubo govoreći, sumirali smo po "pravokutnicima"). U teoremu 2.11 vidjeli smo da za apsolutno konvergentan red, "sumiranje po dijagonalama" također dovodi do iste dvostruke sume. U nastavku, pojam bezuvjetne konvergencije je definiran kao proširenje ideje da postojanje dvostruke sume mora biti neovisno o načinu na koji se formiraju parcijalne dvostruke sume dvostrukog reda. Vidjet ćemo da je ovaj naizgled drugačiji pojam zapravo ekvivalent apsolutnoj konvergenciji.

U tu svrhu kažemo da niz (S_n) podskupova od $\mathbb{N}^2$ *iscrpljuje* skup $\mathbb{N}^2$ ako je S_n konačan, $S_n \subseteq S_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{N}^2$. Na primjer, niz skupova $S_n := \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 :$

$k \leq n$ i $l \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, iscrpljuje skup $\mathbb{N}^2$. Kažemo da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *bezuvjetno konvergentan* ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da za svaki niz (S_n) koji iscrpljuje $\mathbb{N}^2$, limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$$

postoji i jednak je A. U ovom slučaju, A zovemo *bezuvjetna dvostruka suma od* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$.

Lako se vidi da ako su $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ bezuvjetno konvergentni dvostruki redovi, s A i B kao njihovim bezuvjetnim dvostrukim sumama, onda su $\sum\sum_{(k,l)}(a_{k,l} + b_{k,l})$ i $\sum\sum_{(k,l)}(ra_{k,l})$, gdje je $r \in \mathbb{R}$, također bezuvjetno konvergentni redovi i njihove bezuvjetne dvostruke sume su redom $A + B$ i rA.

Pokazat ćemo da je za dvostruki red s nenegativnim članovima, pojam konvergencije ekvivalentan pojmu bezuvjetne konvergencije. Ovaj rezultat se može shvatiti kao generalizacija teorema 2.8.

Teorem 2.12. *Dvostruki red s nenegativnim članovima je bezuvjetno konvergentan ako i samo ako je konvergentan. U ovom slučaju, njegova dvostruka suma se podudara s njegovom bezuvjetnom dvostrukom sumom.*

Dokaz. Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ dvostruki red za koji je $a_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, te za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ neka je $A_{m,n}$ njegova (m,n)-ta parcijalna dvostruka suma.

Pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ bezuvjetno konvergentan i neka je A njegova bezuvjetna dvostruka suma. Neka je $S_n := \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 : k \leq n \text{ i } l \leq n\}$ i $A_n := \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ za $n \in \mathbb{N}$. Budući da niz (S_n) iscrpljuje skup $\mathbb{N}^2$, dobivamo da $A_n \longrightarrow A$ kada $n \longrightarrow \infty$. Stoga, prema teoremu 2.8, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan i njegova dvostruka suma jednaka je A.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan i A je njegova dvostruka suma. Po teoremu 2.6, dvostruko indeksirani niz $(A_{m,n})$ je ograničen i $A = \sup\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$. Neka je (S_n) bilo koji niz podskupova od $\mathbb{N}^2$ koji iscrpljuje skup $\mathbb{N}^2$, te neka je $A_n := \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je niz (A_n) monotono rastući. Uz to, budući da je svaki S_n konačan, vrijedi da je $A_n \leq A_{r,s}$ za neki $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ i stoga je $A_n \leq A$ za $n \in \mathbb{N}$. Posljedično, (A_n) je konvergentan i $\lim_{n\to\infty} A_n = \sup\{A_p : p \in \mathbb{N}\} \leq A$. S druge strane, budući da je (S_n) rastući niz skupova i $\bigcup_{p=1}^{\infty} S_p = \mathbb{N}^2$, to za bilo koji $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $(k,l) \in S_p$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ takve da je $(k,l) \leq (m,n)$, pa je stoga $A_{m,n} \leq A_p$. Odavde slijedi $\sup\{A_p : p \in \mathbb{N}\} = \sup\{A_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\} = A$. Prema tome, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je bezuvjetno konvergentan i njegova bezuvjetna dvostruka suma je jednaka A. □

Da bismo dobili analogon karakterizacije iz prethodnog teorema za dvostruke redove čiji su članovi različitih predznaka, dokazat ćemo sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 2.13. *Neka je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ bezuvjetno konvergentan dvostruki red. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi*

$$\sum\sum_{(k,l)\in S} |a_{k,l}| \leq \alpha \text{ za svaki konačan } S \subseteq \mathbb{N}^2.$$

Dokaz. Najprije ćemo pokazati da postoji $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $|\sum\sum_{(k,l)\in S} a_{k,l}| \leq \beta$ za svaki konačan $S \subseteq \mathbb{N}^2$. Pretpostavimo na trenutak da ovo ne vrijedi. Budući da je skup $\mathbb{N}^2$ prebrojiv, možemo ga zapisati kao $\mathbb{N}^2 = \{(k_j, l_j) : j \in \mathbb{N}\}$. Neka je $D_n := \{(k_j, l_j) : j = 1, \dots, n\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Neka je $U_1 := D_1$. Tada postoji konačan podskup $T_1 \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je $|\sum\sum_{(k,l)\in T_1} a_{k,l}| \geq 1 + |a_{k_1,l_1}|$, te za svaki $n \geq 2$ postoji konačan podskup $T_n \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da je

$$\left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in T_n} a_{k,l}\right| \geq n + \sum\sum\nolimits_{(k,l)\in U_n} |a_{k,l}|,$$

gdje je $U_n := D_n \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{n-1}$. Definirajmo $S_n := T_n \cup U_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je lako vidjeti da niz (S_n) iscrpljuje skup $\mathbb{N}^2$. Ako za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $V_n := S_n \setminus T_n$, onda je $V_n \subseteq U_n$ i

$$\begin{aligned}
\left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}\right| &= \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in T_n} a_{k,l} + \sum\sum\nolimits_{(k,l)\in V_n} a_{k,l}\right| \\
&\geq \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in T_n} a_{k,l}\right| - \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in V_n} a_{k,l}\right| \\
&\geq \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in T_n} a_{k,l}\right| - \sum\sum\nolimits_{(k,l)\in v_n} |a_{k,l}| \\
&\geq \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in T_n} a_{k,l}\right| - \sum\sum\nolimits_{(k,l)\in U_n} |a_{k,l}| \\
&\geq n.
\end{aligned}$$

Stoga, $\lim_{n\to\infty} \sum\sum_{(k,l)\in S_n} a_{k,l}$ ne postoji, a to je kontradikcija. Ovo dokazuje da postoji $\beta \in \mathbb{R}$ koji zadovoljava nejednakost postavljenu na početku ovog dokaza.

Sada, ako za bilo koji konačan podskup $S \subseteq \mathbb{N}^2$ uvedemo oznake $S^+ := \{(k, l) \in S : a_{k,l} \geq 0\}$ i $S^- := \{(k, l) \in S : a_{k,l} \leq 0\}$, onda imamo

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in S} |a_{k,l}| = \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in S^+} a_{k,l}\right| + \left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)\in S^-} a_{k,l}\right| \leq 2\beta.$$

Dobivamo željeni rezultat stavljajući $\alpha := 2\beta$. □

Teorem 2.14. *Dvostruki red je bezuvjetno konvergentan ako i samo ako je apsolutno konvergentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ bezuvjetno konvergentan dvostruki red. Prema prethodnoj lemi, dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ je ograničen i stoga prema teoremu 2.6, vidimo da je $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ konvergentan, to jest, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan.

Suprotno, pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan dvostruki red. Za svaki $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, neka su $a^+_{k,l} := \frac{|a_{k,l}|+a_{k,l}}{2}$, $a^-_{k,l} := \frac{|a_{k,l}|-a_{k,l}}{2}$. Tada su $\sum\sum_{(k,l)} a^+_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} a^-_{k,l}$ konvergentni dvostruki redovi s nenegativnim članovima, i dakle prema teoremu 2.12, oba su bezuvjetno konvergentna. Budući da je $a_{k,l} = a^+_{k,l} - a^-_{k,l}$ za sve $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, slijedi da je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ bezuvjetno konvergentan. □

Prema teoremima 2.9, 2.12 i 2.14, vidimo da je bezuvjetno konvergentan dvostruki red uvijek konvergentan i njegova bezuvjetna dvostruka suma je jednaka njegovoj dvostrukoj sumi. Međutim, obrat ne vrijedi, jer postoje i uvjetno konvergentni dvostruki redovi (v. primjer 2.1.1 (iv)).

2.6 Kriteriji konvergencije za dvostruke redove

U ovom dijelu ćemo govoriti o nekoliko kriterija kojima se može ustanoviti konvergencija ili divergencija dvostrukog reda. Već smo prikazali najjednostavniji među njima, a to je nužni uvjet konvergencije dvostrukog reda (propozicija 2.2). Najprije ćemo promatrati kriterije za apsolutnu konvergenciju, a zatim kriterije za uvjetnu konvergenciju.

Kriteriji za apsolutnu konvergenciju

Sljedeći jednostavan kriterij za određivanje apsolutne konvergencije dvostrukog reda se često koristi.

Teorem 2.15 (Kriterij usporedbe za dvostruke redove)**.** *Neka su $a_{k,l}$ i $b_{k,l}$ realni brojevi takvi da vrijedi $|a_{k,l}| \leq b_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Ako je $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ konvergentan, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan i vrijedi*

$$\left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l}\right| \leq \sum\sum\nolimits_{(k,l)} b_{k,l}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ konvergentan. Za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, imamo

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |a_{k,l}| \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}. \tag{2.1}$$

Budući da je $b_{k,l} \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ je odozgo ograničen (teorem 2.6). Prema drugoj nejednakosti u (2.1), isto vrijedi za $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$. Dakle, budući da je $|a_{k,l}| \geq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, iz teorema 2.6 slijedi da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ konvergentan, to jest, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan. Prema (2.1) imamo

$$\left|\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l}\right| \leq \sum\sum\nolimits_{(k,l)} |a_{k,l}| \leq \sum\sum\nolimits_{(k,l)} b_{k,l}.$$

□

Gornji rezultat može biti izrečen na sljedeći način: Ako je $|a_{k,l}| \leq b_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i ako $\sum\sum_{(k,l)} |a_{k,l}|$ divergira k ∞, onda to vrijedi i za dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$. Geometrijski dvostruki red i dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k^p l^q}$, $p, q \in \mathbb{R}$, su često korisni pri korištenju kriterija usporedbe za dvostruke redove.

Primjer 2.6.1. (i) Za $p \in \mathbb{R}$ i $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, neka je $a_{k,l} := \frac{1}{k^p+l^p}$. Pretpostavimo da je $p > 2$ i neka je $b_{k,l} := \frac{1}{2(kl)^{p/2}}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada je prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine $|a_{k,l}| \leq b_{k,l}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Stoga, prema kriteriju usporedbe, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan. Nadalje, neka je $p \leq 2$ i definirajmo $b_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^2}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada je $|a_{k,l}| \geq \frac{1}{k^2+l^2} \geq b_{k,l}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Stoga, prema kriteriju usporedbe, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je divergentan.

(ii) Za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, neka je $a_{k,l} := \frac{2^k 5^l + kl^2}{3^k 7^l + k^3 + l^4}$. Definirajmo $b_{k,l} := \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^l$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Budući da je $kl^2 < 2^k 5^l$ i $k^3 + l^4 > 0$, vidimo da vrijedi

$$|a_{k,l}| < \frac{2^k 5^l + 2^k 5^l}{3^k 7^l} = 2b_{k,l} \text{ za sve } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Stoga, prema kriteriju usporedbe, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan.

(iii) Neka je $a_{k,l} := \frac{1}{(1+k+l+kl+k^3l^4)^{1/2}}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Definirajmo $b_{k,l} := \frac{1}{k^{3/2}l^2}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada je $|a_{k,l}| \leq b_{k,l}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Stoga, prema kriteriju usporedbe, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je konvergentan.

Sada ćemo razmotriti kriterije konvergencije za dvostruke redove: granični usporedni kriterij, Cauchyjev kriterij i D'Alambertov kriterij. Najprije ćemo navesti osnovne rezultate koji vrijede za redove. Dokazi se mogu pronaći npr. u [3].

Teorem 2.16. *Neka je (a_k) niz realnih brojeva.*

(i) *Pretpostavimo da je $a_k > 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Neka je (b_k) niz pozitivnih realnih brojeva takvih da $\frac{a_k}{b_k} \to r$ kada $k \to \infty$, gdje je $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Tada je red $\sum_k a_k$ konvergentan ako i samo ako je red $\sum_k b_k$ konvergentan.*

(ii) *Ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, i $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_k|^{1/k} \leq \alpha$ za svaki $k \geq k_0$, onda je $\sum_k a_k$ apsolutno konvergentan. Ako je $|a_k|^{1/k} \geq 1$ za beskonačno mnogo $k \in \mathbb{N}$, onda je red $\sum_k a_k$ divergentan.*

(iii) *Ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, i $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_{k+1}| \leq \alpha |a_k|$ za $k \geq k_0$, onda je red $\sum_k a_k$ apsolutno konvergentan. Ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|a_{k+1}| \geq |a_k| > 0$ za svaki $k \geq k_0$, onda je red $\sum_k a_k$ divergentan.*

Sljedeći rezultat će nas dovesti do graničnog usporednog kriterija konvergencije dvostrukog reda koji je često lakše koristiti nego usporedni kriterij.

Teorem 2.17. *Neka su $(a_{k,l})$ i $(b_{k,l})$ dvostruko indeksirani nizovi takvi da je $b_{k,l} \neq 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Pretpostavimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju redovima $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ apsolutno konvergentan i $\frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} \to r$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$, gdje je $r \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

(i) *Ako je* $b_{k,l} > 0$ *za sve* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$*, te ako je dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ *konvergentan i* $r \in \mathbb{R}$*, onda je* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *apsolutno konvergentan.*

(ii) *Ako je* $a_{k,l} > 0$ *za sve* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$*, te ako je dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *konvergentan i* $r \neq 0$*, onda je* $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ *apsolutno konvergentan.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $b_{k,l} > 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ konvergentan. Neka je $r \in \mathbb{R}$ takav da $\frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} \to r$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Tada postoji $(k_0,l_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da za sve $(k,l) \geq (k_0,l_0)$ vrijedi

$$(r-1)b_{k,l} < a_{k,l} < (r+1)b_{k,l} \text{ i } |a_{k,l}| < \max\{|r-1|,|r+1|\}b_{k,l}.$$

Također, prema teoremu 2.6, postoji $\beta > 0$ takav da je $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l} \leq \beta$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Stoga, za sve $(m,n) \geq (k_0,l_0)$, imamo

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} |a_{k,l}| < \max\{|r-1|,|r+1|\}\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} b_{k,l} \leq \max\{|r-1|,|r+1|\}\beta.$$

Prema teoremu 2.10, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan.

(ii) Pretpostavimo da je $a_{k,l} > 0$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i $r \neq 0$. Tada je $\lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} \frac{b_{k,l}}{a_{k,l}}$ jednak $\frac{1}{r}$ ili 0 ovisno o tome je li $r \in \mathbb{R}$ ili je $r = \pm\infty$. Zamjenom $a_{k,l}$ i $b_{k,l}$ u (i) dobivamo željeni rezultat. □

Korolar 2.18 (Granični usporedni kriterij za dvostruke redove)**.** *Neka su* $(a_{k,l})$ *i* $(b_{k,l})$ *dvostruko indeksirani nizovi pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju redovima* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *i* $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ *konvergentan i*

$$\lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} \frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} = r, \text{ gdje je } r \in \mathbb{R} \text{ i } r \neq 0.$$

Tada vrijedi:

$$\sum_{(k,l)} a_{k,l} \text{ konvergentan } \Longleftrightarrow \sum_{(k,l)} b_{k,l} \text{ konvergentan }.$$

Dokaz. Smjer $\Longrightarrow$ slijedi iz teorema 2.17 (ii), dok obratni smjer slijedi iz teorema 2.17 (i). □

Napomena 2.6.1. *U graničnom usporednom kriteriju za dvostruke redove se ne može izostaviti uvjet da je* $r \in \mathbb{R}$ i $r \neq 0$. *Kako bismo pokazali da* r *ne može biti jednak* 0*, neka je*

$$a_{k,l} := \frac{1}{k^2 l^2} \text{ i } b_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^2} \text{ za sve } (k,l) \in \mathbb{N}^2.$$

Uočimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju redovima $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ konvergentan. Međutim, $\lim_{(k,l)\to(\infty,\infty)} \frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} = 0$ i, kao što je pokazano u primjeru 2.1.1 (iii), dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergira, dok dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ divergira. Zamjenom definicija $a_{k,l}$ i $b_{k,l}$ vidimo da r također ne može biti ∞.

Primjer 2.6.2. (i) Neka je $a_{k,l} := \sin \frac{1}{k^2 l^2}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Promotrimo $b_{k,l} := \frac{1}{k^2 l^2}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i uočimo da $\frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} \to 1$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Budući da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ konvergentan, prethodni korolar pokazuje da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ konvergentan.

(ii) Neka je $a_{k,l} := \sin \frac{1}{(k+l)^2}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Promotrimo $b_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^2}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i uočimo da $\frac{a_{k,l}}{b_{k,l}} \to 1$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Budući da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ divergentan, prethodni korolar nam sad pokazuje da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.

Sljedeći rezultat će nas dovesti do Cauchyjevog kriterija konvergencije koji je jedan od osnovnih kriterija za određivanje apsolutne konvergencije dvostrukih redova.

U daljnjem tekstu, kad god kažemo da određena tvrdnja vrijedi "za velike k i l" mislimo da postoji $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ tako da tvrdnja vrijedi za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ za koje je $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

Teorem 2.19. *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva.*

(i) *Pretpostavimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan. Ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, takav da $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \leq \alpha$ za velike k i l, onda je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan.*

(ii) *Ako za svaki $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$, postoji $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ tako da je $(k,l) \geq (k_0, l_0)$ i $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$, onda je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da postoje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, i $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \leq \alpha$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Tada je $\alpha \geq 0$ i vrijedi

$$\sum_{k=k_0}^{m} \sum_{l=l_0}^{n} |a_{k,l}| \leq \left(\sum_{k=k_0}^{m} \alpha^k \right) \left(\sum_{l=l_0}^{n} \alpha^l \right) \leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \text{ za } (m,n) \geq (k_0, l_0).$$

Stoga, tvrdnja (i) slijedi iz teorema 2.10.

(ii) Pretpostavimo da za svaki $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ postoji $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $(k,l) \geq (k_0, l_0)$ i $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$, to jest, $|a_{k,l}| \geq 1$. Stoga, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Prema propoziciji 2.2, slijedi da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan. □

Korolar 2.20 (Cauchyjev kriterij konvergencije za dvostruke redove)**.** *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva takav da $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \to a$ za $(k,l) \to (\infty, \infty)$, gdje je $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ako je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju dvostrukom redu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan i $a < 1$, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan. S druge strane, ako je $a > 1$, onda je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan i svi osim konačno mnogo redak-redova i stupac-redova su također divergentni.*

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz teorema 2.19 (i) za $\alpha := \frac{1+a}{2}$. Sada pretpostavimo da je $a > 1$. Tada postoji $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \geq 1$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Tvrdnja (ii) iz teorema 2.19 pokazuje da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan. Također, za svaki fiksni $k \geq k_0$ vidimo da $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $l \to \infty$, i stoga redak-red $\sum_l a_{k,l}$ divergira. Slično, za svaki fiksni $l \geq l_0$, stupac-red $\sum_k a_{k,l}$ divergira. □

Sljedeći rezultat nas dovodi do D'Alambertovog kriterija. To je drugi osnovni kriterij za određivanje apsolutne konvergencije dvostrukih redova.

Teorem 2.21. *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva.*

(i) *Pretpostavimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju dvostrukom redu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan. Ako postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, takav da je ili $|a_{k,l+1}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ za velike k i l, ili $|a_{k+1,l}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ za velike k i l, onda je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan.*

(ii) *Ako je $\min\{|a_{k,l+1}|, |a_{k+1,l}|\} \geq |a_{k,l}| > 0$ za velike k i l, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan i svi osim konačno mnogo redak-redova i stupac-redova su također divergentni.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da postoje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, i $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $|a_{k,l+1}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Možemo pretpostaviti da je $\alpha > 0$. Imamo $|a_{k,l}| \leq \alpha |a_{k,l-1}| \leq \cdots \leq \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}|$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Budući da je $0 < \alpha < 1$, vidimo da je $\sum_{l=1}^n \alpha^l \leq \frac{1}{1-\alpha}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Također, budući da je red $\sum_k a_{k,l_0}$ apsolutno konvergentan, postoji $\beta > 0$ takav da je $\sum_{k=1}^m |a_{k,l_0}| \leq \beta$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Posljedično,

$$\sum_{k=k_0}^m \sum_{l=l_0}^n |a_{k,l}| \leq \sum_{k=k_0}^m \sum_{l=l_0}^n \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}| = \alpha^{-l_0} \sum_{k=k_0}^m |a_{k,l_0}| \sum_{l=l_0}^n \alpha^l \leq \frac{\alpha^{-l_0}}{1-\alpha} \sum_{k=k_0}^m |a_{k,l_0}| \leq \frac{\alpha^{-l_0}\beta}{1-\alpha}$$

za sve $(m,n) \geq (k_0, l_0)$. Stoga, prema teoremu 2.10, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je apsolutno konvergentan. Slično se pokaže da tvrdnja vrijedi i u slučaju da postoje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, i $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $|a_{k+1,l}| \leq \alpha |a_{k,l}|$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$.

(ii) Pretpostavimo da postoji $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ takav da je $\min\{|a_{k,l+1}|, |a_{k+1,l}|\} \geq |a_{k,l}| > 0$ za sve $(k,l) \geq (k_0, l_0)$. Tada je

$$|a_{k,l}| \geq |a_{k,l-1}| \geq \cdots \geq |a_{k,l_0}| \geq |a_{k-1,l_0}| \geq \cdots \geq |a_{k_0,l_0}| > 0$$

za sve $(k,l) \geq (k_0,l_0)$. Budući da je $a_{k_0,l_0} \neq 0$, uočavamo da $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$, te za svaki fiksni $k \geq k_0$, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $l \to \infty$ i za svaki fiksni $l \geq l_0$, $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $k \to \infty$. Željeni rezultat sada slijedi iz propozicije 2.2. □

Korolar 2.22 (D'Alambertov kriterij konvergencije za dvostruke redove)**.** *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva različitih od* 0 *takvih da ili $\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{k,l}|} \to a$ ili $\frac{|a_{k+1,l}|}{|a_{k,l}|} \to \tilde{a}$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$, pri čemu su $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ako je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan i $a < 1$ ili $\tilde{a} < 1$, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ apsolutno konvergentan. S druge strane, ako je $a > 1$, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan i svi osim konačno mnogo redak-redova su također divergentni, a ako je $\tilde{a} > 1$, onda je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan i svi osim konačno mnogo stupac-redova su također divergentni.*

Dokaz. Prvi rezultat je posljedica teorema 2.21 (i) za $\alpha := (1+a)/2$ ili $\alpha := (1+\tilde{a})/2$ prema tome je li $a < 1$ ili je $\tilde{a} < 1$.

Sada pretpostavimo da je $a > 1$. Tada postoje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, i $(k_0,l_0) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{k,l}|} \geq \alpha$ za sve $(k,l) \geq (k_0,l_0)$. Tada imamo

$$|a_{k,l}| \geq \alpha |a_{k,l-1}| \geq \cdots \geq \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}| \quad \text{za sve } (k,l) \geq (k_0,l_0).$$

Za bilo koji $(k_1,l_1) \in \mathbb{N}^2$, neka je $k := \max\{k_0,k_1\}$. Budući da je $\alpha > 1$ i $a_{k,l_0} \neq 0$, možemo naći $l \geq \max\{l_0,l_1\}$ takav da je $\alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| \geq 1$. Tada je $k \geq k_1, l \geq l_1$ i $|a_{k,l}| \geq 1$. Ovo pokazuje da $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$, te je stoga dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan prema propoziciji 2.2. Također, za svaki fiksni $k \geq k_0$, imamo $|a_{k,l}| \geq \alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| \geq |a_{k,l_0}| > 0$ za sve $l \geq l_0$ te $a_{k,l} \nrightarrow 0$ za $l \to \infty$, što povlači da je $\sum_l a_{k,l}$ divergentan. Slični argumenti vrijede za $\tilde{a} > 1$. □

Primjer 2.6.3. (i) Ako je limes a u Cauchyjevom kriteriju (korolar 2.20) jednak 1, onda dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ može apsolutno konvergirati ili divergirati. Ista tvrdnja vrijedi ako su limesi a i $\tilde{a}$ u D'Alambertovom kriteriju konvergencije (korolar 2.22) jedanki 1. Na primjer, neka je $a_{k,l} := \frac{1}{k^2 l^2}$ i $b_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^2}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada se lako vidi je svaki redak-red i svaki stupac-red koji odgovaraju dvostrukim redovima $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ i $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ (apsolutno) konvergentan i svi gore spomenuti limesi su jednaki 1 u oba slučaja. Međutim, kao što smo vidjeli u primjeru 2.1.1 (iii), $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je (apsolutno) konvergentan, ali dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ je divergentan.

(ii) Neka je $p > 0$ i za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, neka je $a_{k,l} := \frac{(k+l)^p}{2^k 3^l}$. Lako se vidi (koristeći npr. teorem 2.16 (iii)) da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju dvostrukom redu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ (apsolutno) konvergentan. Budući da $\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{k,l}|} \to \frac{1}{3}$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$, prema korolaru 2.22 je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ (apsolutno) konvergentan. Alternativno, isti zaključak slijedi primjećujući da $\frac{|a_{k+1,l}|}{|a_{k,l}|} \to \frac{1}{2}$ za $(k,l) \to (\infty,\infty)$.

(iii) Neka je $a_{k,l} := \frac{(k+l)!}{2^k 3^l}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Budući da $\frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} \to \infty$ za $(k,l) \to (\infty, \infty)$, prema korolaru 2.22 je $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan. Alternativno, kako je $a_{k,l} \geq \frac{k!}{2^k} \cdot \frac{l!}{3^l} \geq 1$ za $(k,l) \geq (4,7)$, vidimo da je prema propoziciji 2.2 dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ divergentan.

(iv) Neka je $a_{k,l} := \frac{(k+l)!}{(k+l)^{k+l}}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Budući da $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ za $n \to \infty$, gdje je e baza prirodnog logaritma, vidimo da $\frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} \to \frac{1}{e}$ za $(k,l) \to (\infty, \infty)$. Također, za svaki fiksni $k \in \mathbb{N}$, imamo $\lim_{l \to \infty} \frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} = \frac{1}{e}$, te za svaki fiksni $l \in \mathbb{N}$, imamo $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1,l}}{a_{k,l}} = \frac{1}{e}$. Budući da je $e > 1$, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ je (apsolutno) konvergentan prema korolaru 2.22 i prema teoremu 2.16 (iii).

(v) Za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, neka je

$$a_{k,l} := \begin{cases} \frac{1}{2^{k+l}}, & \text{ako je } k+l \text{ paran,} \\ \frac{1}{3^{k+l}}, & \text{ako je } k+l \text{ neparan.} \end{cases}$$

Budući da je $\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{k,l}|} = \frac{|a_{k+1,l}|}{|a_{k,l}|} = \frac{2^{k+l}}{3^{k+l+1}} \leq \frac{4}{27}$ ako je $k+l$ paran broj i $\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{k,l}|} = \frac{|a_{k+1,l}|}{|a_{k,l}|} = \frac{3^{k+l}}{2^{k+l+1}} \geq \frac{27}{16}$ ako je $k+l$ neparan broj, D'Alabmertov kriterij (korolar 2.22) nije primjenjiv u ovom primjeru. Iz istog razloga, teorem 2.21 nije primjenjiv. Nadalje, budući da dvostruko indeksirani niz $(|a_{k,l}|^{1/(k+l)})$ ne konvergira, nije primjenjiv Cauchyjev kriterij (korolar 2.20). Međutim, budući da su $|a_{k,l}|^{1/l}|$ i $|a_{k,l}|^{1/k}|$ manji ili jednaki $\frac{1}{2}$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, vidimo da je svaki redak-red kao i svaki stupac-red koji odgovaraju dvostrukom redu $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ (apsolutno) konvergentan. Također, $|a_{k,l}|^{1/(k+l)} \leq \frac{1}{2} < 1$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i stoga je primjenjiv teorem 2.19. Zaključujemo da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ (apsolutno) konvergentan.

Kriteriji za uvjetnu konvergenciju

Sada ćemo opisati kriterije za uvjetnu konvergenciju. Oni se temelje na sljedećem rezultatu, koji glasi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k,$$

gdje su $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, a_k i b_k realni brojevi, te $B_k = \sum_{l=1}^{k} b_l$ za $k = 1, \ldots, n$.

Propozicija 2.23 (Formula za parcijalno dvostruko sumiranje)**.** *Neka je $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tako da je $(m,n) \geq (2,2)$. Za $k = 1, \ldots, m$ i $l = 1, \ldots, n$, neka su $a_{k,l}$ i $b_{k,l}$ realni brojevi i neka je*

$B_{k,l} := \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} b_{i,j}$. *Tada imamo*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} &= a_{m,n}B_{m,n} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})B_{k,l} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1}(a_{k,n} - a_{k+1,n})B_{k,n} + \sum_{l=1}^{n-1}(a_{m,l} - a_{m,l+1})B_{m,l}.\end{aligned}$$

Dokaz. Budući da je $b_{k,l} = B_{k,l} - B_{k-1,l} - B_{k,l-1} + B_{k-1,l-1}$ (s tim da je $B_{0,0} = 0, B_{0,l} = 0$ i $B_{k,0} = 0$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$), dobivamo

$$\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l} - \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k-1,l} - \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l-1} + \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k-1,l-1}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l} - \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n} a_{k+1,l}B_{k,l} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k,l+1}B_{k,l} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k+1,l+1}B_{k,l}.\end{aligned}$$

Nakon zapisivanja dvostruke sume $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l}$ u gornju jednakost kao

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}B_{k,l} = a_{m,n}B_{m,n} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{k,l}B_{k,l} + \sum_{k=1}^{m-1} a_{k,n}B_{k,n} + \sum_{l=1}^{n-1} a_{m,l}B_{m,l},$$

i uspoređivanjem odgovarajućih članova, dobivamo željenu jednakost. □

Prisjetimo se Dirichletovog kriterija za konvergenciju redova.

Teorem 2.24 (Dirichletov kriterij za redove)**.** *Neka su* (a_k) *i* (b_k) *nizovi realnih brojeva takvi da*

(i) (a_k) *monotono teži nuli,*

(ii) *niz parcijalnih suma reda* $\sum_k b_k$ *je ograničen.*

Tada je red $\sum_k a_k b_k$ *konvergentan.*

Sada ćemo navesti važan kriterij za konvergenciju dvostrukog reda koji je analogon Dirichletovom kriteriju za redove.

Teorem 2.25 (Dirichletov kriterij za dvostruke redove)**.** *Neka su $(a_{k,l})$ i $(b_{k,l})$ dvostruko indeksirani nizovi realnih brojeva takvi da*

(i) *$(a_{k,l})$ je bimonoton,*

(ii) *za svaki fiksni $l \in \mathbb{N}$, niz $k \mapsto a_{k,l}$ je monoton, i za svaki fiksni $k \in \mathbb{N}$, niz $l \mapsto a_{k,l}$ je monoton,*

(iii) $\lim_{k\to\infty} a_{k,k}$, $\lim_{k\to\infty} a_{k,1}$ *i* $\lim_{l\to\infty} a_{1,l}$ *postoje i svaki je jednak* 0*,*

(iv) *dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} b_{k,l}$ je ograničen.*

Tada je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}b_{k,l}$ konvergentan i dvostruko indeksirani niz njegovih parcijalnih dvostrukih suma je ograničen.

Dokaz. Najprije ćemo pokazati da $a_{k,l} \to 0$ kada $(k,l) \to (\infty,\infty)$ i da je $(a_{k,l})$ ograničen. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci (iii), postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$(k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ i } (k,l) \geq (k_0,k_0) \implies |a_{k,k}| < \varepsilon,\ |a_{k,1}| < \varepsilon \text{ i } |a_{1,l}| < \varepsilon.$$

Razmotrimo $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ s tim da je $k \geq k_0$ i $l \leq k$. Prema pretpostavci (ii), ili je $a_{k,1} \leq a_{k,l} \leq a_{k,k}$ ili $a_{k,1} \geq a_{k,l} \geq a_{k,k}$. Budući da je $a_{k,1}, a_{k,k} \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$, slijedi $a_{k,l} \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$. Slično, ako je $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ s tim da je $l \geq k_0$ i $k \leq l$, onda je $a_{k,l} \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$. Dakle, za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ s tim da je $k \geq k_0$ ili $l \geq k_0$ vrijedi $|a_{k,l}| < \varepsilon$. Budući da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, ovo povlači da $a_{k,l} \to 0$ kada $(k,l) \to (\infty,\infty)$. Također, stavimo li $\varepsilon := 1$ i $\alpha := \max\{|a_{k,l}| : 1 \leq k,l \leq k_0\}$, dobivamo $|a_{k,l}| \leq \max\{1,\alpha\}$, što pokazuje da je $(a_{k,l})$ ograničen.

Razmotrimo sada svaki član na desnoj strani formule za parcijalno dvostruko sumiranje (propozicija 2.23). Prvi član je $a_{m,n}B_{m,n}$, gdje je $B_{m,n} := \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}$ za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Budući da je $(B_{m,n})$ ograničen prema pretpostavci (iv), to postoji $\beta > 0$ takav da je $|B_{m,n}| \leq \beta$ za sve $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Budući da $a_{m,n} \to 0$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$, slijedi da $a_{m,n}B_{m,n} \to 0$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$.

Što se tiče drugog člana, uočimo da je prema pretpostavci (i), dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ bimonoton, i stoga za sve $(m,n) \geq (2,2)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} & \left|(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})B_{k,l}\right| \\
&\leq \beta \left|\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}(a_{k,l} - a_{k+1,l} - a_{k,l+1} + a_{k+1,l+1})\right| \\
&= \beta \left|a_{1,1} - a_{m,1} - a_{1,n} + a_{m,n}\right|.
\end{aligned}$$

Budući da je dvostruko indeksirani niz $(a_{m,n})$ ograničen, iz teorema 2.6 slijedi da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)}(a_{k,l}-a_{k+1,l}-a_{k,l+1}+a_{k+1,l+1})B_{k,l}$ apsolutno konvergentan. Prema teoremu 2.11 (i), dvostruko indeksirani niz njegovih parcijalnih dvostrukih suma je ograničen, a prema teoremu 2.9 taj dvostruki red je konvergentan. Neka C označava njegovu dvostruku sumu.

Razmotrimo treći član. Budući da je za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$, niz $k \mapsto a_{k,n}$ monoton, to za svaki $(m,n) \geq (2,2)$ vrijedi

$$\left|\sum_{k=1}^{m-1} (a_{k,n} - a_{k+1,n})\, B_{k,n}\right| \leq \beta \left|\sum_{k=1}^{m-1} (a_{k,n} - a_{k+1,n})\right| = \beta \left|a_{1,n} - a_{m,n}\right|.$$

Kako $a_{1,n} \to 0$ kada $n \to \infty$ i $a_{m,n} \to 0$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$, zaključujemo da $|a_{1,n} - a_{m,n}| \to 0$ te stoga $\sum_{k=1}^{m-1}(a_{k,n} - a_{k+1,n})B_{k,n} \to 0$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$. Slično, slijedi da $\sum_{l=1}^{n-1}(a_{m,l} - a_{m,l+1})B_{m,l} \to 0$ kada $(m,n) \to (\infty,\infty)$.

Prema formuli za parcijalno dvostruko sumiranje, dobivamo

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}b_{k,l} \to 0 + C + 0 + 0 = C \quad \text{kada } (m,n) \to (\infty,\infty),$$

što pokazuje da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}b_{k,l}$ konvergentan. Također, budući da je svaki od četiri člana na desnoj strani formule za parcijalno dvostruko sumiranje ograničen, to je dvostruko indeksirani niz parcijalnih dvostrukih suma dvostrukog reda $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}b_{k,l}$ ograničen. □

Korolar 2.26 (Leibnizov kriterij za dvostruke redove)**.** *Neka je $(a_{k,l})$ dvostruko indeksirani niz realnih brojeva koji zadovoljava pretpostavke (i), (ii) i (iii) dane u teoremu 2.25. Tada je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)}(-1)^{k+l}a_{k,l}$ konvergentan.*

Dokaz. Definiramo $b_{k,l} := (-1)^{k+l}$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ i $B_{m,n} := \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{k,l}$ za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.Tada

$$B_{m,n} = \left(\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n}(-1)^l\right) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } m \text{ ili } n \text{ paran,} \\ 1 & \text{ako su } m \text{ i } n \text{ neparni.} \end{cases}$$

Stoga je dvostruko indeksirani niz $(B_{m,n})$ ograničen. Sada teorem 2.25 pokazuje da je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)}(-1)^{k+l}a_{k,l}$ konvergentan. □

U sljedećem korolaru, koristit ćemo trigonometrijske identitete

$$\sin\frac{B}{2}\sum_{j=1}^{p}\sin(A + jB) = \sin\Big(A + \frac{p+1}{2}B\Big)\sin\frac{pB}{2}$$

i

$$\sin\frac{B}{2}\sum_{j=1}^{p}\cos(A + jB) = \cos\Big(A + \frac{p+1}{2}B\Big)\sin\frac{pB}{2},$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{N}$.

Korolar 2.27 (Kriterij konvergencije za trigonometrijske dvostruke redove)**.** *Neka je* $(a_{k,l})$ *dvostruko indeksirani niz realnih brojeva koji zadovoljava pretpostavke (i), (ii) i (iii) teorema 2.25. Neka su* θ *i* φ *realni brojevi, od kojih niti jedan nije cjelobrojni višekratnik broja* 2π*. Tada su dvostruki redovi*

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l}\sin(k\theta + l\varphi) \quad i \quad \sum\sum\nolimits_{(k,l)} a_{k,l}\cos(k\theta + l\varphi)$$

konvergentni.

Dokaz. Za $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, definiramo

$$B_{m,n} := \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sin(k\theta + l\varphi) \quad \text{i} \quad C_{m,n} := \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\cos(k\theta + l\varphi).$$

Budući da niti jedan od θ i φ nije cjelobrojni višekratnik od 2π, to je $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ i $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$. Koristeći gore navedene trigonometrijske identitete, dobivamo

$$B_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\sin\left(k\theta + \frac{n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi + \frac{m+1}{2}\theta\right)\sin\frac{m\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

i

$$C_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\cos\left(k\theta + \frac{n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi + \frac{m+1}{2}\theta\right)\sin\frac{m\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Slijedi

$$\left|B_{m,n}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right|} \text{ i } \left|C_{m,n}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right|} \quad \text{za sve } (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

Stavimo $b_{k,l} := \sin(k\theta + l\varphi)$ za $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Tada su ispunjene pretpostavke teorema 2.25, pa je dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\sin(k\theta + l\varphi)$ konvergentan. Slično, $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\cos(k\theta + l\varphi)$ je konvergentan. □

Primijetimo da je korolar 2.26 poseban slučaj korolara 2.27 s $\theta = \pi = \varphi$.

Napomena 2.6.2. *Ako su* θ *i* φ *cjelobrojni višekratnici broja* 2π*, onda je* $\sin(k\theta + l\varphi) = 0$ *i* $\cos(k\theta + l\varphi) = 1$ *za sve* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$*, pa je svaki član dvostrukog reda* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\sin(k\theta + l\varphi)$ *jednak nuli, dok je dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\cos(k\theta + l\varphi)$ *zapravo dvostruki red* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}$ *koji može konvergirati ili divergirati. Nadalje, pretpostavimo da je jedan od* θ *i* φ *cjelobrojni višekratnik od* 2π*, a drugi nije. Pretpostavimo da je* $\theta = 2p\pi$ *za neki* $p \in \mathbb{Z}$ *i* $\varphi \neq 2q\pi$ *za bilo koji* $q \in \mathbb{Z}$*. Tada je* $\sin(k\theta + l\varphi) = \sin(l\varphi)$ *i* $\cos(k\theta + l\varphi) = \cos(l\varphi)$ *za sve* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$*. Ovisno o izboru dvostruko indeksiranog niza* $(a_{k,l})$ *(koji zadovoljava pretpostavke (i), (ii) i (iii) teorema 2.25) i ovisno o izboru* φ*, dvostruki redovi* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\sin(l\varphi)$ *i* $\sum\sum_{(k,l)} a_{k,l}\cos(l\varphi)$ *mogu apsolutno konvergirati, mogu uvjetno konvergirati ili mogu divergirati.*

Primjer 2.6.4. Neka je $p > 0$ i $a_{k,l} := \frac{1}{(k+l)^p}$ za $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. Jasno je da $(a_{k,l})$ zadovoljava pretpostavke (ii) i (iii) teorema 2.25. Pokažimo da $(a_{k,l})$ zadovoljava pretpostavku (i) teorema 2.25. U tu svrhu uvedimo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Tada je $f''(x) = \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} > 0$ za svaki $x \in \langle 0, \infty \rangle$, pa je f konveksna funkcija. Stoga je za sve $k, l \in \mathbb{N}$,

$$f(k+l+1) = f\left(\frac{(k+l)+(k+l+2)}{2}\right) \le \frac{1}{2} f(k+l) + \frac{1}{2} f(k+l+2),$$

odnosno

$$\frac{1}{(k+l+1)^p} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+l)^p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+l+2)^p}.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} a_{k,l+1} + a_{k+1,l} &= \frac{1}{(k+l+1)^p} + \frac{1}{(k+l+1)^p} = \frac{2}{(k+l+1)^p} \\ &\le \frac{1}{(k+l)^p} + \frac{1}{(k+l+2)^p} \\ &= a_{k,l} + a_{k+1,l+1} \end{aligned}$$

za sve $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, pa je dvostruko indeksirani niz $(a_{k,l})$ bimonotono rastući, čime je zadovoljena pretpostavka (i) teorema 2.25. Prema Leibnizovom kriteriju, dvostruki red

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(-1)^{k+l}}{(k+l)^p}$$

je konvergentan. Zapravo, prema primjeru 2.3.1 (i), dvostruki red je apsolutno konvergentan za $p > 2$ i uvjetno konvergentan za $0 < p \le 2$. S druge strane, propozicija 2.2 pokazuje da je taj dvostruki red divergentan za $p \le 0$.

Nadalje, ako je $p > 0$ i ako niti jedan od θ i φ nije cjelobrojni višekratnik od 2π, onda korolar 2.27 pokazuje da su dvostruki redovi

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{\sin(k\theta + l\varphi)}{(k+l)^p} \quad \text{i} \quad \sum\sum_{(k,l)} \frac{\cos(k\theta + l\varphi)}{(k+l)^p}$$

konvergenti.

2.7 Dvostruki red potencija

Za nenegativne cijele brojeve k i l, neka je $c_{k,l} \in \mathbb{R}$. Dvostruki red

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)\geq(0,0)} c_{k,l}x^k y^l, \quad \text{gdje je } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

zovemo *dvostruki red potencija* (oko $(0,0)$). Za $(k,l) \geq (0,0)$, realni broj $c_{k,l}$ se zove (k,l)-ti *koeficijent*. Ubuduće, kada budemo promatrali dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$, pretpostavljat ćemo da indeks (k,l) prolazi skupom svih parova nenegativnih cijelih brojeva, te da su koeficijenti $c_{k,l}$ realni brojevi. Za $(m,n) \geq (0,0)$, (m,n)-ta parcijalna dvostruka suma dvostrukog reda potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ je

$$A_{m,n}(x,y) := \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} c_{k,l}x^k y^l.$$

Ako je $(x,y) = (0,0)$ onda je, za bilo koji izbor koeficijenata $c_{k,l}$, dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ konvergentan i njegova dvostruka suma je jednaka $c_{0,0}$. Također, ako je $x \in \mathbb{R}$ i $y = 0$, onda je dvostruki red potencija konvergentan ako i samo ako je red potencija $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,0}x^k$ konvergentan. Isto tako, ako je $x = 0$ i $y \in \mathbb{R}$, onda je dvostruki red potencija konvergentan ako i samo ako je red potencija $\sum_{l=0}^{\infty} c_{0,l}y^l$ konvergentan.

Općenitije, ako je $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, onda dvostruki red

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)\geq(0,0)} c_{k,l}(x-x_0)^k(y-y_0)^l$$

zovemo *dvostruki red potencija* oko (x_0,y_0). Kriteriji konvergencije ovog dvostrukog reda dobiju se razmatranjem dvostrukog reda potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}\tilde{x}^k\tilde{y}^l$, gdje je $\tilde{x} = x - x_0$ i $\tilde{y} = y - y_0$.

Tipični skupovi točaka $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je dvostruki red potencija konvergentan prikazani su u sljedećim primjerima.

Primjer 2.7.1. (i) Neka je $c_{k,l} := k^k l^l$ za $(k,l) \geq (0,0)$. Neka je $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ako je $x \neq 0$ i $y \neq 0$, onda je $\left|c_{k,l}x^k y^l\right| > 1$ za sve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ takve da je $k > \frac{1}{|x|}$ i $l > \frac{1}{|y|}$. Stoga je prema propoziciji 2.2 dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ divergentan. Slično, ako je $x \neq 0$ i $y = 0$, onda je red $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,0}x^k$ divergentan, i ako je $x = 0$ i $y \neq 0$ onda je red $\sum_{l=0}^{\infty} c_{0,l}y^l$ divergentan. Prema tome, dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ je konvergentan ako i samo ako je $(x,y) = (0,0)$.

(ii) Neka je $c_{k,l} := \frac{1}{k!l!}$ za $(k,l) \geq (0,0)$. Iz primjera 2.1.1 (ii) slijedi da je dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ konvergentan za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Neka su $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, te neka je $c_{k,l} := a^k b^l$ za $(k,l) \geq (0,0)$. Iz primjera 2.1.1 (i) slijedi da je dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ (apsolutno) konvergentan ako i samo ako je $|ax| < 1$ i $|by| < 1$, odnosno, $|x| < \frac{1}{|a|}$ i $|y| < \frac{1}{|b|}$.

(iv) Za $(k, l) \geq (0, 0)$, neka je

$$c_{k,l} := \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = 1, \\ 0, & \text{ako je } k \neq 1. \end{cases}$$

Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, parcijalne dvostruke sume dvostrukog reda potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ su

$$A_{m,n}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } m = 0,\ n \geq 0, \\ x \sum_{l=0}^{n} y^l, & \text{ako je } (m, n) \geq (1, 0). \end{cases}$$

Posljedično, dvostruki red potencija konvergira apsolutno ako je $x = 0$ ili $|y| < 1$, dok divergira ako je $x \neq 0$ i $|y| \geq 1$. Slijedi da je skup svih $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje dvostruki red potencija konvergira jednak skupu $\mathbb{R} \times \langle -1, 1\rangle$ zajedno s osi y. Na tom skupu je konvergencija apsolutna.

(v) Za $(k, l) \geq (0, 0)$, neka je

$$c_{k,l} := \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = l, \\ 0, & \text{ako je } k \neq l. \end{cases}$$

Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, parcijalne dvostruke sume dvostrukog reda potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ su

$$A_{m,n}(x, y) := \sum_{p=0}^{\min\{m,n\}} (xy)^p \quad \text{za } (m, n) \geq (0, 0).$$

Koristeći činjenicu da je geometrijski red $\sum_p a^p$ apsolutno konvergentan ako je $|a| < 1$, dok divergira ako je $|a| \geq 1$, vidimo da je dvostruki red potencija apsolutno konvergentan ako je $|xy| < 1$, dok divergira ako je $|xy| \geq 1$. Tako da je podskup od $\mathbb{R}^2$ na kojem ovaj dvostruki red potencija konvergira jednak skupu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < xy < 1\}$ omeđenom hiperbolama $xy = 1$ i $xy = -1$. Na tom skupu konvergencija je apsolutna.

(vi) Neka je $c_{k,l} := \frac{(k+l)!}{k!l!}$ za $(k, l) \geq (0, 0)$. Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Kao u dokazu teorema 2.8 (iii), pokaže se da je

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} |c_{k,l}||x|^k|y|^l \leq \sum_{j=0}^{m+n} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!|x|^{j-k}|y|^k}{k!(j-k)!} = \sum_{j=0}^{m+n} (|x| + |y|)^j$$

za $(m, n) \geq (0, 0)$, a

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} |c_{k,l}||x|^k|y|^l \geq \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!|x|^k|y|^{j-k}}{k!(j-k)!} = \sum_{j=0}^{n} (|x| + |y|)^j$$

za $n \geq 0$. S obzirom da geometrijski red $\sum_j(|x| + |y|)^j$ konvergira apsolutno ako i samo ako je $|x| + |y| < 1$, iz gornjih nejednakosti slijedi da i dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ konvergira apsolutno ako i samo ako je $|x| + |y| < 1$.

Za razliku od redova potencija, gdje je područje konvergencije reda uvijek jednočlan skup ili interval u $\mathbb{R}$, gornji primjeri pokazuju da skup svih $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ (apsolutno) konvergira može biti raznolik. U vezi s navedenim, prisjetit ćemo se dvije tvrdnje vezane uz redove potencija.

Lema 2.28 (Abelova lema)**.** *Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i $c_k \in \mathbb{R}$ za $k \geq 0$. Ako je skup $\{c_k x_0^k : k \geq 0\}$ ograničen, onda je red potencija $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ apsolutno konvergentan za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| < |x_0|$.*

Iz prethodne leme proizlazi osnovni rezultat o (apsolutnoj) konvergenciji reda potencija.

Teorem 2.29 (Abelov teorem)**.** *Red potencija $\sum_k c_k x^k$ ili apsolutno konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$, ili postoji nenegativan realan broj r takav da red potencija $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ apsolutno konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x| < r$ i divergira za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x| > r$.*

Ako red potencija $\sum_k c_k x^k$ apsolutno konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$, tada kažemo da je njegov *radijus konvergencije* jednak ∞. U protivnom, *radijus konvergencije* reda potencija $\sum_k c_k x^k$ definira se kao jedinstveni nenegativni realni broj r, takav da red apsolutno konvergira na intervalu $\langle -r, r\rangle$ i divergira na skupu $\langle -\infty, -r\rangle \cup \langle r, \infty\rangle$. Sada ćemo pokazati analogone prethodnih rezultata za dvostruke redove potencija.

Lema 2.30 (Abelova lema za dvostruke redove potencija)**.** *Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i neka je $c_{k,l} \in \mathbb{R}$ za $(k, l) \geq (0, 0)$. Ako je skup $\{c_{k,l} x_0^k y_0^l : (k, l) \geq (0, 0)\}$ ograničen, onda je dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ apsolutno konvergentan za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takav da je $|x| < |x_0|$ i $|y| < |y_0|$.*

Dokaz. Ako je $x_0 = 0$ ili $y_0 = 0$, nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da je $x_0 \neq 0$ i $y_0 \neq 0$. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $|c_{k,l} x_0^k y_0^l| \leq \alpha$ za sve $(k, l) \geq (0, 0)$. Uzmimo proizvoljni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takav da je $|x| < |x_0|$ i $|y| < |y_0|$ i stavimo $\beta := \frac{|x|}{|x_0|}$ i $\gamma := \frac{|y|}{|y_0|}$. Tada je

$$\left|c_{k,l} x^k y^l\right| = \left|c_{k,l} x_0^k y_0^l\right| \beta^k \gamma^l \leq \alpha \beta^k \gamma^l \text{ za sve } (k, l) \geq (0, 0).$$

Budući da je $\beta < 1$ i $\gamma < 1$, geometrijski dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} \beta^k \gamma^l$ je konvergentan. Prema kriteriju usporedbe za dvostruke redove (teorem 2.15) slijedi da je $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ apsolutno konvergentan. $\square$

Teorem 2.31 (Abelov teorem za dvostruke redove potencija)**.** *Dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ ili apsolutno konvergira za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ili postoje nenegativni realni brojevi r i s takvi da red apsolutno konvergira za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi $|x| < r$ i $|y| < s$, dok je skup $\{c_{k,l} x^k y^l : (k, l) \geq (0, 0)\}$ neograničen za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $|x| > r$ i $|y| > s$.*

Dokaz. Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, neka je $C_{x,y} := \{c_{k,l} x^k y^l : (k, l) \geq (0, 0)\}$. Neka je $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : C_{x,y}$ ograničen $\}$. Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, uočimo da je $(x, y) \in E$ ako i samo ako je $(|x|, |y|) \in E$. Ako je $E = \mathbb{R}^2$, onda za bilo koji $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ možemo pronaći $(x_0, y_0) \in E$ takav da je $|x| < |x_0|$ i $|y| < |y_0|$. Budući da je skup C_{x_0,y_0} ograničen, prema lemi 2.30, dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ je apsolutno konvergentan. Nadalje, pretpostavimo da je $E \neq \mathbb{R}^2$. Skup E je neprazan budući da je $(0, 0) \in E$. Stoga skup E ima rubnu točku $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$. Definirajmo $r := |x^*|$ i $s := |y^*|$. Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| < r$ i $|y| < s$. Prema definiciji rubne točke, postoji niz u E koji konvergira k (x^*, y^*), tako da možemo pronaći $(x_0, y_0) \in E$ takav da je $|x| < |x_0|$ i $|y| < |y_0|$. Stoga, prema lemi 2.30, $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ je apsolutno konvergentan. S druge strane, neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takav da je $|x| > r$ i $|y| > s$. Prema definiciji rubne točke, postoji niz u $\mathbb{R}^2 \setminus E$ koji konvergira k (x^*, y^*), tako da možemo pronaći $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ takav da je $|x_1| < |x|$ i $|y_1| < |y|$. Budući da je skup C_{x_1,y_1} neograničen, slijedi da je skup $C_{x,y}$ također neograničen. Ovo dokazuje postojanje nenegativnih realnih brojeva r i s koji imaju tražena svojstva. □

Ako je dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$ apsolutno konvergentan za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onda kažemo da je njegov *biradijus konvergencije* (∞, ∞). Inače, kažemo da je uređeni par (r, s) nenegativnih realnih brojeva *biradijus konvergencije* dvostrukog reda potencija, ako dvostruki red apsolutno konvergira za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s tim da je $|x| < r$ i $|y| < s$, dok je skup $C_{x,y} := \{c_{k,l} x^k y^l : (k, l) \geq (0, 0)\}$ neograničen za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $|x| > r$ i $|y| > s$. Prema prethodnom teoremu svaki dvostruki red potencija ima biradijus konvergencije.

Napomena 2.7.1. (i) *Zanimljivo je uočiti da ako je r radijus konvergencije reda potencija, onda red potencija divergira za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x| > r$, a ako je (r, s) biradijus konvergencije dvostrukog reda potencija, onda je skup $C_{x,y} := \{c_{k,l} x^k y^l : (k, l) \geq (0, 0)\}$ neograničen za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ takve da je $|x| > r$ i $|y| > s$. Neograničenost skupa $C_{x,y}$ u teoremu 2.31 se ne može zamijeniti s divergencijom dvostrukog reda potencija u (x, y) kao što pokazuje sljedeći primjer. Neka je $c_{0,0} := 1, c_{k,0} = c_{0,l} := 1$ za sve $k, l \in \mathbb{N}$, $c_{1,1} := -1, c_{k,1} = c_{1,l} := -\frac{1}{2}$ za sve $k, l \geq 2$, i $c_{k,l} := 0$ za sve $(k, l) \geq (2, 2)$. Ako $A_{m,n}(x, y)$ označava (m, n)-tu parcijalnu dvostruku sumu dvostrukog reda potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l} x^k y^l$, onda je $A_{0,0}(x, y) = 1$ i za $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vrijedi*

$$A_{m,0}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} x^k, \quad A_{0,n}(x, y) = \sum_{l=0}^{n} y^l,$$

i

$$A_{m,n}(x,y) = 1 + \left(1 - \frac{y}{2}\right)\sum_{k=1}^{m} x^k + \left(1 - \frac{x}{2}\right)\sum_{l=1}^{n} y^l. \tag{2.2}$$

Jasno je da dvostruki red potencija $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ *apsolutno konvergira za sve* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *takve da je* $|x| < 1$ *i* $|y| < 1$*. Ako je* $|x| > 1$ *i* $|y| > 1$*, tada je* $c_{k,0}|x|^k|y|^0 = |x|^k$ *i* $c_{0,l}|x|^0|y|^l = |y|^l$ *za sve* $(k,l) \in \mathbb{N}^2$*, odakle slijedi* $\lim_{k\to\infty} c_{k,0}|x|^k|y|^0 = \infty$ *i* $\lim_{l\to\infty} c_{0,l}|x|^0|y|^l = \infty$*, što pokazuje da je skup* $C_{x,y}$ *neograničen. Time smo ujedno pokazali da je uređeni par* $(1,1)$ *biradijus konvergencije dvostrukog reda potencija* $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$*. Međutim, ne postoje nenegativni realni brojevi* r *i* s *takvi da ovaj dvostruki red potencija konvergira apsolutno za sve* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *za koje je* $|x| < r$ *i* $|y| < s$ *i divergira za sve* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *za koje je* $|x| > r$ *i* $|y| > s$*. Naime, kako* $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ *konvergira apsolutno za* $|x| < 1$ *i* $|y| < 1$*, te kako prema* (2.2) *dvostruki red potencija* $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ *divergira k* ∞ *za* $x, y \in [1,2\rangle$*, to su* $r = 1$ *i* $s = 1$ *jedini kandidati za brojeve* r *i* s*. Međutim, budući da je* $A_{m,n}(2,2) = 1$ *za sve* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$*, vidimo da dvostruki red potencija* $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ *konvergira k* 1 *u* $(2,2)$*. Stoga brojevi* $r = 1$ *i* $s = 1$ *ne zadovoljavaju traženi uvjet.*

(ii) *Radijus konvergencije reda potencija je jedinstven. Dvostruki red potencija može imati nekoliko biradijusa konvergencije. Na primjer, neka je* $c_{k,l} := 1$ *ako je* $k = l$ *i* $c_{k,l} = 0$ *ako je* $k \neq l$ *za sve* $(k,l) \geq (0,0)$*. Tada dvostruki red potencija* $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l = \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$ *konvergira apsolutno ako je* $|xy| < 1$*. S druge strane, ako je* $|xy| > 1$*, onda je skup* $C_{x,y} := \{x^k y^k : k \geq 0\}$ *neograničen. Slijedi da je* $(t, 1/t)$ *biradijus konvergencije za svaki pozitivni realni broj* t*. Stoga je važno pronaći sve biradijuse konvergencije, ili ako to ne uspije, onda barem što ih je moguće više, kako bi se dobila potpunija slika konvergencije dvostrukog reda potencija.*

Ako je r radijus konvergencije reda potencija, onda je *interval konvergencije* tog reda potencija jednak $\langle -r, r\rangle$. To je najveći otvoreni podskup od $\mathbb{R}$ u kojemu dvostruki red apsolutno konvergira. Analogno, *domena konvergencije* dvostrukog reda potencija definira se kao skup svih $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takvih da dvostruki red potencija konvergira apsolutno u svakoj točki nekog otvorenog kvadrata sa središtem u (x,y). Uočimo da ako je D domena konvergencije dvostrukog reda potencija, onda je D otvoreni podskup od $\mathbb{R}^2$ i čak štoviše, $(x,y) \in D$ ako i samo ako je $(|x|,|y|) \in D$. Prema lemi 2.30 i teoremu 2.6 slijedi da $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pripada domeni konvergencije od $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ ako i samo ako je skup $\{c_{k,l}x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\}$ ograničen za svaki (x,y) u nekom otvorenom kvadratu sa središtem u (x_0, y_0). Također slijedi da je domena konvergencije dvostrukog reda potencija prazan skup ako i samo ako je $(0,0)$ biradijus konvergencije tog dvostrukog reda potencija.

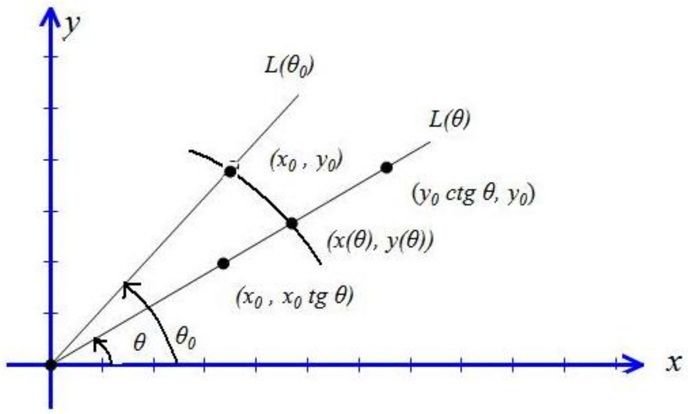
Neka je $\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l$ dvostruki red potencija i neka je D domena njegove konvergencije. Pretpostavimo da je $(0,0) \in D$ i $D \neq \mathbb{R}^2$. Pokazat ćemo kako odrediti $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, neka je $C_{x,y} := \{c_{k,l}x^k y^l : (k,l) \geq (0,0)\}$. Prema lemi 2.30 slijedi da za svaki $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ postoji jedinstvena točka $(x(\theta), y(\theta))$ na zraci

$$L_\theta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \sin\theta = y \cos\theta\}$$

takva da vrijede sljedeća dva uvjeta:

(i) dvostruki red potencija konvergira apsolutno u svakoj točki (x, y) na otvorenom intervalu između $(0, 0)$ i $(x(\theta), y(\theta))$,

(ii) skup $C_{x,y}$ je neograničen za svaki $(x, y) \in L_\theta$ takav da je $x > x(\theta)$ i $y > y(\theta)$.



Slika 2.1:

Pokazat ćemo da su realne funkcije definirane s $\theta \longmapsto x(\theta)$ i $\theta \longmapsto y(\theta)$ neprekidne na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Neka je $\theta_0 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $(x_0, y_0) := (x(\theta_0), y(\theta_0))$. Sada dvostruki red potencija konvergira apsolutno za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koji je $0 \le x < x_0$ i $0 \le y < y_0$, a skup $C_{x,y}$ je neograničen za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koji je $x > x_0$ i $y > y_0$. Stoga, za bilo koji $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, točka $(x(\theta), y(\theta))$ pripada segmentu koji spaja točke $(x_0, x_0 \mathrm{tg}\, \theta)$ i $(y_0 \mathrm{ctg}\, \theta, y_0)$. Budući da su funkcije tangens i kotangens neprekidne u θ_0 i budući da vrijedi $x_0 \mathrm{tg}\, \theta_0 = y_0$ i $y_0 \mathrm{ctg}\, \theta_0 = x_0$, slijedi $\lim_{\theta \to \theta_0} x(\theta) = x_0$ i $\lim_{\theta \to \theta_0} y(\theta) = y_0$. Ovo dokazuje neprekidnost funkcija $\theta \longmapsto x(\theta)$ i $\theta \longmapsto y(\theta)$ u točki θ_0. Označavajući domenu konvergencije dvostrukog reda potencija u prvom kvadrantu dobili smo neprekidnu krivulju. S obzirom na simetriju dobivamo slične krivulje u preostala tri kvadranta (isključujući os x i os y).

U sljedećoj tablici navedene su domene konvergencije i biradijusi konvergencije dvostrukih redova potencija razmatranih u primjeru 2.7.1.

Dvostruki red potencija	*Domena konvergencije*	*Biradijus konvergencije*
$\sum\sum_{(k,l)} k^k l^l x^k y^l$	$\emptyset$	$(0,0)$
$\sum\sum_{(k,l)} \frac{1}{k!l!} x^k y^l$	$\mathbb{R}^2$	(∞,∞)
$\sum\sum_{(k,l)} a^k b^l x^k y^l$	$\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \lvert x\rvert < \frac{1}{\lvert a\rvert}$	$\left(r, \frac{1}{\lvert b\rvert}\right)$ za $0 \le r \le \frac{1}{\lvert a\rvert}$,
$a \neq 0, b \neq 0$	i $\lvert y\rvert < \frac{1}{\lvert b\rvert}\Big\}$	$\left(\frac{1}{\lvert a\rvert}, s\right)$ za $0 \le s \le \frac{1}{\lvert b\rvert}$
$x\sum_{l=0}^{\infty} y^l$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \lvert y\rvert < 1\}$	$(r,1)$ za $0 \le r < \infty$,
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \lvert xy\rvert < 1\}$	$(t, \frac{1}{t})$ za $0 < t < \infty$
$\sum\sum_{(k,l)} \frac{(k+l)!}{k!l!} x^k y^l$	$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \lvert x\rvert + \lvert y\rvert < 1\}$	$(t, 1-t)$ za $0 \le t \le 1$

Ovi primjeri su tipični i pokazuju raznolikost oblika domene konvergencije dvostrukog reda potencija. Primjer u predzadnjem redu gornje tablice pokazuje da domena konvergencije ne mora biti konveksan podskup od $\mathbb{R}^2$. Međutim, prema Fabryjevom rezultatu iz 1902. godine, domena konvergencije svakog dvostrukog reda potencija je *log-konveksna*, to jest, otvoren podskup D od $\mathbb{R}^2$ takav da je $\{(\ln|x|, \ln|y|) : (x,y) \in D \text{ i } xy \neq 0\}$ konveksan poskup od $\mathbb{R}^2$.

2.8 Taylorov dvostruki red i Taylorov red

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, neka je (x_0, y_0) unutarnja točka od D i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ takva da sve parcijalne derivacije od f svakoga reda postoje i neprekidne su na nekom kvadratu sa središtem u točki (x_0, y_0). Dvostruki red potencija

$$\sum\sum_{(k,l)} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{(y-y_0)^l}{l!}$$

se zove *Taylorov dvostruki red* funkcije f oko točke (x_0, y_0). Uočimo da su koeficijenti ovog dvostrukog reda potencija jednaki

$$c_{k,l} := \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0) \quad \text{za } (k,l) \geq (0,0).$$

Za $n = 0, 1, 2, \ldots$, n-ta parcijalna suma dijagonalnog reda $\sum_j c_j(x, y)$ koji odgovara gornjem dvostrukom redu je

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} c_j(x,y) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k\geq 0} \sum_{l\geq 0}{}_{k+l=j} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{(y-y_0)^l}{l!} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{\partial^j f}{\partial x^k \partial y^{j-k}}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{(y-y_0)^{j-k}}{(j-k)!}.\end{aligned}$$

Polinom

$$P_n(x,y) := \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \frac{\partial^j f}{\partial x^k \partial y^{j-k}}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{(y-y_0)^{j-k}}{(j-k)!}$$

zove se n-ti *Taylorov polinom* funkcije f oko točke (x_0, y_0), a red

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y), \quad \text{gdje je } c_j(x,y) := \sum_{k\geq 0} \sum_{l\geq 0}{}_{k+l=j} c_{k,l}(x-x_0)^k (y-y_0)^l \text{ za } j \geq 0,$$

Taylorov red funkcije f oko (x_0, y_0). Dakle, Taylorov red funkcije dviju varijabli je dijagonalan red koji odgovara njenom Taylorovom dvostrukom redu.

Važno pitanje koje bismo željeli razmotriti je sljedeće: je li Taylorov dvostruki red i/ili Taylorov red funkcije f oko (x_0, y_0) (apsolutno) konvergentan u danoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i ako je tako, je li odgovarajuća dvostruka suma i/ili odgovarajuća suma jednaka $f(x, y)$, pod uvjetom da je $(x, y) \in D$. Ako je $(x, y) := (x_0, y_0)$, onda je svaka parcijalna dvostruka suma Taylorovog dvostrukog reda funkcije f oko (x_0, y_0), kao i svaka parcijalna suma Taylorovog reda funkcije f oko (x_0, y_0), očito jednaka $f(x_0, y_0)$. Stoga je odgovor na naše pitanje potvrdan ako je $(x, y) = (x_0, y_0)$. Međutim, moguće je da za svaki $(x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ i Taylorov dvostruki red i Taylorov red funkcije f oko (x_0, y_0) konvergiraju, ali ne k $f(x, y)$. Na primjer, neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Funkcija f može se prikazati kao kompozicija funkcija $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih s

$$h(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{ako je } t \neq 0, \\ 0, & \text{ako je } t = 0. \end{cases}$$

S obzirom da je $g^{(k)}(0) = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, to je

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k y^l}(0,0) = 0 \quad \text{za sve } (k,l) \geq (0,0).$$

Prema tome, Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0,0)$ kao i Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ su nul-funkcije i zato ne konvergiraju k $f(x,y)$ niti u jednoj točki $(x,y) \neq (0,0)$.

Ako Taylorov dvostruki red funkcije f oko (x_0,y_0) konvergira apsolutno u $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ onda prema teoremu 2.11 (iii), Taylorov red funkcije f oko (x_0,y_0) također konvergira apsolutno u (x,y). Obrat ne vrijedi, kao što ćemo vidjeti u primjeru 2.8.1 (ii).

Za $(x,y) \in D$ i $n = 0,1,2,\ldots$, neka je

$$R_n(x,y) := f(x,y) - P_n(x,y).$$

Primijetimo da Taylorov red funkcije f oko (x_0,y_0) konvergira k $f(x,y)$ ako i samo ako $R_n(x,y) \to 0$ kada $n \to \infty$. Sljedeći rezultat daje dovoljne uvjete za apsolutnu konvergenciju na $\mathbb{R}^2$ Taylorovog dvostrukog reda i Taylorovog reda funkcije f, odnosno dovoljne uvjete uz koje oba reda konvergiraju prema f.

Teorem 2.32. *Neka je D otvoren podskup od $\mathbb{R}^2$ i neka je $(x_0,y_0) \in D$. Pretpostavimo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima neprekidne sve parcijalne derivacije svakog reda na skupu D. Pretpostavimo da postoje pozitivni realni brojevi M_0, α_0 i β_0 takvi da vrijedi*

$$\left|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x_0,y_0)\right| \leq M_0 {\alpha_0}^k {\beta_0}^l \quad \text{za sve } (k,l) \geq (0,0).$$

Tada Taylorov dvostruki red funkcije f i Taylorov red funkcije f oko (x_0,y_0) konvergiraju apsolutno za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Čak štoviše, oba reda konvergiraju k $f(x,y)$, pod uvjetom da dužina L koja spaja (x_0,y_0) i (x,y) leži u D, te da postoje pozitivni realni brojevi M, α i β takvi da vrijedi

$$\left|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(\tilde{x},\tilde{y})\right| \leq M \alpha^k \beta^l \quad \text{za sve } (\tilde{x},\tilde{y}) \in L \text{ i za sve } (k,l) \geq (0,0).$$

Dokaz. Budući da eksponencijalni dvostruki red

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} \frac{[\alpha_0 (x - x_0)]^k}{k!} \frac{[\beta_0 (y - y_0)]^l}{l!}$$

konvergira apsolutno za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (v. primjer 2.1.1 (ii)), to prema teoremu 2.15 Taylorov dvostruki red funkcije f oko (x_0,y_0) konvergira apsolutno za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posljedično, prema teoremu 2.11 (iii), odgovarajući dijagonalan red, to jest Taylorov red funkcije f oko (x_0,y_0), također konvergira apsolutno za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nadalje, neka je $(x,y) \in D$ takav da dužina L koja spaja (x_0,y_0) i (x,y) leži u D, te neka postoje pozitivni realni brojevi M, α i β takvi da vrijedi

$$\left|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(\tilde{x},\tilde{y})\right| \leq M \alpha^k \beta^l \quad \text{za sve } (\tilde{x},\tilde{y}) \in L \text{ i za sve } (k,l) \geq (0,0).$$

Tada, prema klasičnoj verziji Taylorovog teorema, postoji $(c, d) \in L$ takav da

$$R_n(x,y) = f(x,y) - P_n(x,y) = \sum_{k\geq 0} \sum_{l\geq 0} \sum_{k+l=n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^k \partial y^l}(c,d) \frac{(x-x_0)^k}{k!} \frac{(y-y_0)^l}{l!},$$

i posljedično,

$$\begin{aligned} |R_n(x,y)| &\leq \sum_{k\geq 0} \sum_{l\geq 0} \sum_{k+l=n+1} M \frac{(\alpha|x-x_0|)^k}{k!} \frac{(\beta|y-y_0|)^l}{l!} \\ &= M \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(\alpha|x-x_0|)^k}{k!} \frac{(\beta|y-y_0|)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \\ &= \frac{M(\alpha|x-x_0| + \beta|y-y_0|)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da $R_n \to 0$ kada $n \to \infty$. Prema tome, Taylorov red funkcije f oko (x_0, y_0) konvergira k $f(x, y)$ u točki (x, y). Konačno, apsolutna konvergencija Taylorovog dvostrukog reda funkcije f oko (x_0, y_0) u (x, y) povlači da je njegova dvostruka suma također jednaka $f(x, y)$ (prema teoremu 2.11). □

Primjer 2.8.1. (i) Neka je $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1 \text{ i } y < 1\}$ i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) := \frac{1}{(1-x)(1-y)}$. Lako se vidi da vrijedi

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = k!l! \quad \text{za sve } (k,l) \geq (0,0).$$

Prema tome, Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0, 0)$ je geometrijski dvostruki red $\sum\sum_{(k,l)} x^k y^l$. Kao što smo vidjeli u primjeru 2.1.1 (i), taj dvostruki red konvergira apsolutno za $|x| < 1$ i $|y| < 1$, a inače divergira. Osim toga, ako je $|x| < 1$ i $|y| < 1$, onda je dvostruka suma jednaka $\frac{1}{(1-x)(1-y)} = f(x, y)$. Taylorov red funkcije f oko $(0, 0)$ je

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y), \quad \text{gdje je } c_j(x,y) := \sum_{k=0}^{j} x^k y^{j-k} \quad \text{za } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Prema teoremu 2.11 (iii), taj red konvergira apsolutno za $|x| < 1$ i $|y| < 1$, i tada je njegova suma jednaka $f(x, y)$. Pokazat ćemo da red divergira za $|x| \geq 1$ ili $|y| \geq 1$. Pretpostavimo da je $|x| \geq 1$ i neka je $u := \frac{y}{x}$. Tada imamo

$$c_j(x,y) = x^j \sum_{k=0}^{j} u^{j-k} = x^j(1 + u + \cdots + u^j) \quad \text{za } j \geq 0.$$

Ako je $u = 1$, onda je $|c_j(x,y)| = |x|^j(j+1) \geq j+1$, a ako je $u \neq 1$, onda

$$|c_j(x,y)| = \frac{|x|^j|u^{j+1}-1|}{|u-1|} \geq \frac{|u^{j+1}-1|}{|u-1|} \quad \text{za } j \geq 0.$$

Slijedi da $c_j(x,y) \nrightarrow 0$ kada $j \to \infty$. Stoga Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ divergira za $|x| \geq 1$. Slično se pokaže da red divergira za $|y| \geq 1$.

(ii) Neka je $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$ i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) := \frac{1}{1-x-y}$. Lako se vidi da vrijedi

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = (k+l)! \quad \text{za } k,l = 0,1,2,\ldots$$

Stoga je Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0,0)$ jednak

$$\sum\sum\nolimits_{(k,l)} \frac{(k+l)!}{k!l!} x^k y^l.$$

Kao što je pokazano u primjeru 2.7.1 (vi), ovaj dvostruki red konvergira apsolutno ako i samo ako je $|x| + |y| < 1$. Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ jednak je

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} x^k y^{j-k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (x+y)^j.$$

Ovaj geometrijski red konvergira ako i samo ako je $|x+y| < 1$, i u ovom slučaju, konvergencija je apsolutna i suma reda u (x,y) je jednaka $\frac{1}{1-(x+y)} = f(x,y)$. Dakle, ako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zadovoljava $|x+y| < 1 \leq |x| + |y|$, onda Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ konvergira apsolutno u (x,y), ali ne i Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0,0)$. Budući da je Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ dijagonalan red koji odgovara Taylorovom dvostrukom redu funkcije f oko $(0,0)$, slijedi iz teorema 2.8 da ako za $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $|x| + |y| < 1$, onda je dvostruka suma Taylorovog dvostrukog reda funkcije f oko $(0,0)$ u (x,y) jednaka $f(x,y)$. Može se pokazati da ovaj Taylorov dvostruki red konvergira uvjetno u $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ako i samo ako je $x \in \langle -1, 0 \rangle$ i $x + y = -1$ i u tom slučaju je njegova dvostruka suma jednaka $\frac{1}{2}$.

(iii) Neka je $D := \mathbb{R}^2$ i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) := \sin(x+y)$. Stavimo li $g(u) := \sin u$ za $u \in \mathbb{R}$, lako se vidi da za $k,l = 0,1,2,\ldots$, vrijedi

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = g^{(k+l)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \ k+l \ \text{ paran broj,} \\ (-1)^{(k+l-1)/2}, & \text{ako je } \ k+l \ \text{ neparan broj.} \end{cases}$$

Stoga je Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0,0)$ jednak

$$\sum\sum_{(k,l)} c_{k,l}x^k y^l, \quad \text{gdje je } c_{k,l} := \begin{cases} 0, & \text{ako je } \ k+l \ \text{ paran broj,} \\ \frac{(-1)^{(k+l-1)/2}}{k!l!}, & \text{ako je } \ k+l \ \text{ neparan broj.} \end{cases}$$

Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ jednak je

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(x,y), \quad \text{gdje je } c_j(x,y) := \sum_{k=0}^{j} g^{(j)}(0)\frac{x^k}{k!}\frac{y^{j-k}}{(j-k)!} = \frac{g^{(j)}(0)}{j!}(x+y)^j,$$

to jest,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(x+y)^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Iz teorema 2.32 slijedi da i Taylorov dvostruki red i Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ konvergiraju apsolutno k $f(x,y)$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Neka je $D := \mathbb{R}^2$ i neka je $f : D \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) := e^{x+y}$. Tada je

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = 1 \quad \text{za } k,l = 0,1,2,\ldots,$$

pa je

$$\sum\sum_{(k,l)}\frac{x^k y^l}{k!l!}$$

Taylorov dvostruki red funkcije f oko $(0,0)$, a

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x+y)^j}{j!}$$

Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$. Prema teoremu 2.32 slijedi da i Taylorov dvostruki red i Taylorov red funkcije f oko $(0,0)$ konvergiraju apsolutno k $f(x,y)$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Napomena 2.8.1. *Neka je D otvoren podskup od $\mathbb{R}^2$ i neka funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ima neprekidne sve parcijalne derivacije svakog reda na skupu D. Ako za svaki $(x_0,y_0) \in D$, postoje $r > 0$ i $s > 0$ takvi da Taylorov dvostruki red funkcije f oko (x_0,y_0) konvergira apsolutno k $f(x,y)$ za sve $(x,y) \in D$ za koje je $|x-x_0| < r$ i $|y-y_0| < s$, onda za f kažemo da je realna analitička funkcija na D. U ovom slučaju, prema teoremu 2.11 (iii), Taylorov red funkcije f oko (x_0,y_0) također konvergira apsolutno k $f(x,y)$ za sve $(x,y) \in D$ za koje je $|x-x_0| < r$ i $|y-y_0| < s$. Očito, polinomi u dvije varijable su realne analitičke* *funkcije na* $\mathbb{R}^2$*. Koristeći teorem 2.32, vidimo da su funkcije definirane s* $f_1(x, y) := \sin(x + y)$ *i* $f_2(x, y) := e^{x+y}$ *za sve* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *realne analitičke funkcije na* $\mathbb{R}^2$*. Zapravo, ako je D domena konvergencije dvostrukog reda potencija i ako je njegova dvostruka suma označena s* $f(x, y)$ *za* $(x, y) \in D$*, onda je funkcija* f *realna analitička na skupu D (v. 9.2.2 i 9.3.1 u [1]). S druge strane, funkcija koja ima neprekidne sve parcijalne derivacije svakog reda na nekom otvorenom podskupu od* $\mathbb{R}^2$ *ne mora biti realna analitička funkcija na tom podskupu. Kao primjer, može se uzeti funkcija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana s* $f(0, 0) := 0$ *i* $f(x, y) := e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ *za* $(x, y) \neq (0, 0)$.

Bibliografija

[1] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, London, 1969.

[2] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*, Springer, New York, 2010.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza* 2 : *funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[4] B. V. Limaye, M. Zeltser, *On the Pringsheim convergence of double series*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 58 (2) (2009), 108–121.

[5] M. Mursaleen, S. A. Mohiuddine, *Convergence Methods for Double Sequences and Applications*, Springer, India, 2014.

[6] A. Pringsheim, *Elementare theorie der unendlichen doppelreihen*, Münch. Ber. 27 (1897), 101–152.

Sažetak

Tema ovog rada su dvostruko indeksirani nizovi i dvostruki redovi. U prvom poglavlju prikazujemo neke osnovne rezultate vezane uz konvergenciju te monotonost i bimonotonost dvostruko indeksiranih nizova. Dvostruke redove i njihovu konvergenciju proučavamo u drugom poglavlju. U točki 2.1 diskutiramo konvergenciju geometrijskog, eksponencijalnog, harmonijskog dvostrukog reda i njegovih varijanti. Konvergenciju dvostrukog reda povezujemo s konvergencijom odgovarajućih uzastopnih redova (Fubinijev i Tonellijev teorem). U točki 2.4 uvodimo pojam apsolutne i uvjetne konvergencije dvostrukog reda te dobivamo neke korisne karakterizacije apsolutne konvergencije. Razni testovi za određivanje apsolutne i uvjetne konvergencije dvostrukog reda dani su u točki 2.6. Dvostruki redovi potencija proučavaju se u točki 2.7. Dvostruki red potencija može imati više biradijusa konvergencije. Također njegova domena konvegencije može poprimiti razne oblike i čak ne mora biti konveksan podskup od $\mathbb{R}^2$. U točki 2.8, kao poseban slučaj dvostrukog reda potencija, proučava se Taylorovi dvostruki red, te odgovarajući dijagonalni red nazvan Taylorovim redom.

Summary

The subject of this work are double sequences and double series. In the first chapter we present some basic results on double sequences related to convergence, monotonicity and bimonotonicity. Double series and their convergence is considered in the second chapter. In Section 2.1, the convergence of geometric, exponential, harmonic double series and its variants is discussed. We relate the convergence of a double series to the convergence of the corresponding iterated series (Fubini's theorem, Tonelli's theorem). In Section 2.4, we introduce the concept of absolute and conditional convergence of a double series, and obtain some useful characterizations of absolute convergence. Various tests for determining absolute and conditional convergence of a double series are given in Section 2.6. Double power series are considered in Section 2.7. A double power series may have many biradii of convergence. Also, its domain of convergence can have a variety of shapes, and it need not even be a convex subset of $\mathbb{R}^2$. In Section 2.8, Taylor double series is treated as a special case of a double power series. The corresponding diagonal series, called the Taylor series, is considered as well.

Životopis

Rođena sam 11. rujna 1987. u Vukovaru. Prvih pet razreda osnovne škole pohađala sam u Umagu u Osnovnoj školi Marija i Lina. Preostala tri razreda završila sam u Osnovnoj školi Antuna Bauera u Vukovaru. 2002. godine upisala sam Gimnaziju Vukovar u kojoj sam maturirala 2006. godine. Iste godine upisala sam sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2012. godine upisala sam na istom fakultetu Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer nastavnički.